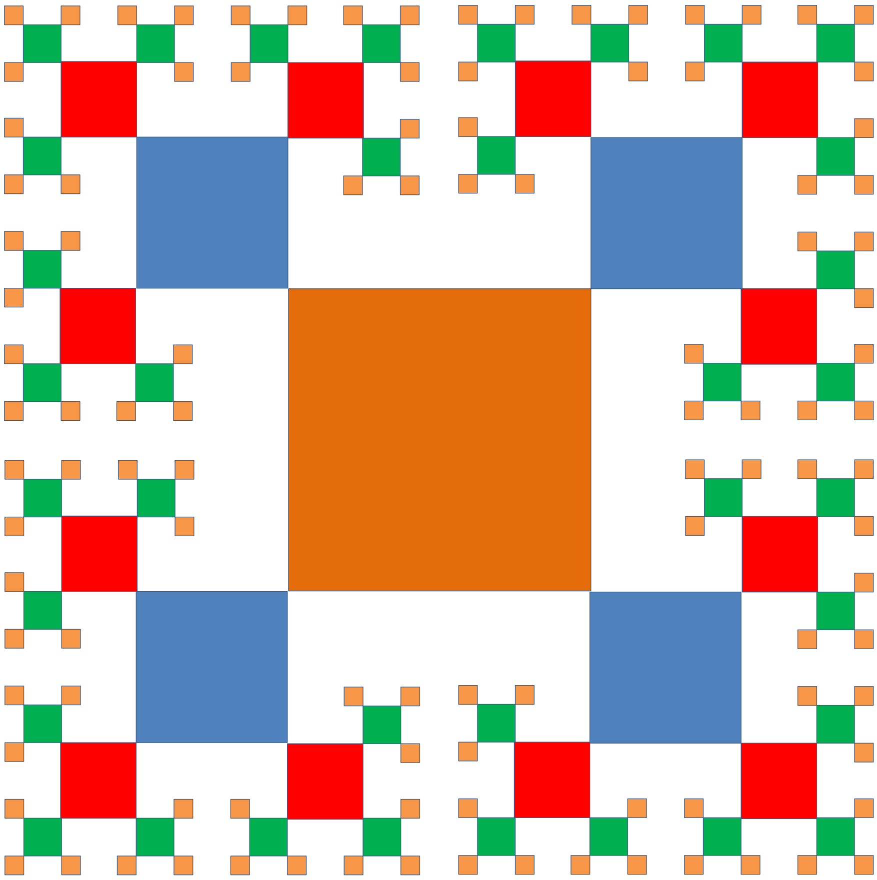
Матиева Г., Борбоева Г. М.

ФРАКТАЛДЫК ГЕОМЕТРИЯНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ



Ош-2018

Матиева Г., Борбоева Г. М.

ФРАКТАЛДЫК ГЕОМЕТРИЯНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

Ош-2018

УДК 514
ББК 22.151

М33

Окуу-усулдук колдонмо Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар кеңешинин чечими боюнча басмага сунушталды.

Рецензенттер:

- Ош мамлекеттик университетинин Программалоо кафедрасынын башчысы, физ.-мат. илим.док, проф. А.Сопув
- Т. Адышев атындагы Ош технологиялык университетинин Колдонмо математика кафедрасынын башчысы, физ.-мат. илим.док., проф. А.Аширбаева

Матиева Г., Борбоева Г.М.

М 33. Фракталдык геометриянын элементтери: Окуу-усулдук колдонмо. – Ош: 2018. 72 бет. ISBN 978-9967-18-470-1

Мукабанын бетинде проф. Г.Матиеванын “Пределдик квадрат” деп аталган фракталы.

Окуу-усулдук колдонмо «550200 – физика-математикалык билим берүү» багытынын «Математика» профилинин студенттеринин тандоо курсу жана мектеп окуучуларынын математикалык ийрими үчүн даярдалды. Колдонмодо фракталдык геометриянын негизги түшүнүктөрү жана геометриялык фракталдарды түзүүгө берилген маселелер камтылган.

М 1602050000-18

ISBN 978-9967-18-470-1

УДК 514

ББК 22.151

Мазмуну

Киришүү

“Эмне үчүн геометрияны “кургак” жана “муздак” деп айтышат?” деген суроо пайда болот. Анын бир себеби геометриянын булуттардын, тоолордун, бак-дарактардын, деңиз жээктеринин, ж.у.с. жаратылыштык объектилердин формасын туура көрсөтүп берүү үчүн мүмкүнчүлүгүнүн аздыгында. Үйлөр – параллелепипед, булуттар – сфера, тоолор – конус болушпайт, деңиз жээктерин айлананын формасында көрсөтүү туура эмес, бак-дарактын кабыгын жылма деп атаганга болбойт, ал эми чагылгандын жолу түз сызыктуу эмес... Жаратылыш бизге жогорку даражаны гана көрсөтпөстөн, андан татаал болгон деңгээлди көрсөтөт. Түзүлүштөрдөгү узундуктардын түрдүү масштабдарынын саны ар дайым чексиз болот”[8].

“Геометрия” дегенде эле биздин эсибизге түз сызык, үч бурчтук, айлана, цилиндр, бурч, бурчтун биссектрисасы, ж.у.с. мектеп геометриясындагы (евклиддик) фигуралар келет. Ошондуктан тегерегибиздеги жаратылыштагы объектилерди караганда алардан мектеп геометриясынан алган түшүнүктөрүн гана көрө алабыз. Мисалы, бир имаратты карасак, анын формасын, бийиктигин, терезелеринин формасын, канча кабаттан тургандыгын ж.у.с. адам жасаган жактарын сүрөттөп бере алабыз, ал эми анын тегерегиндеги бак-дарактын формасын, арт жагында көрүнүп турган тоо болсо, анын формасын сүрөттөп берүүдө кыйналабыз. Бирок бул объектилерди чыныгы көрүнүшүндөй кылып сүрөттөп берүүгө жардам берген теориянын түзүлүшү геометрияда гана эмес адамзаттын бүтүндөй жашоосунда чоң бурулушту жаратты.

Фракталдык геометрия студенттер менен илимий изилдөөлөрдү жүргүзүү үчүн чоң мүмкүнчүлүктөрдү берет жана ушунун өзү аларда төмөндөгүдөй изилдөөчүлүк компетенцияларынын өсүшүнө алып келет: табигый илимдер, математика жана информатика боюнча жалпы базалык билимдерин көрсөтө алуу, заманбап информациялык жана билим берүү технологияларын колдонуу менен кесиптик жана илимий жаңы билимдерге ээ болуу жөндөмдүүлүгү, заманбап математикалык аппаратты түшүнүү жана аны илим изилдөө иш-аракетинде колдонуу жөндөмдүүлүгү, топтогон тажрыйбасын сын көз караш менен кайрадан талдап, түшүнүп, зарыл болгон учурда өзүнүн кесиптик иш-аракетинин мүнөзү жана түрүн өзгөртүү жөндөмдүүлүгү. Ошондой эле фракталдарды изилдөө жана түздүрүү аркылуу студенттердин мейкиндик ой жүгүртүү жөндөмдүүлүгүн өстүрүүгө болот.

§1. “Фрактал” түшүнүгү

Даректын, деңиздин жээгинин, булуттардын, тоолордун, айнек бетиндеги аяздын жана организмибиздеги кан тамырлардын кандай жалпылыгы бар?

Биринчи көз караштан караганда алардын ортосунда эч кандай деле жалпылык жоктой туюлат. Бирок, чындыгында, бул түшүнүктөрдүн бардыгына таандык болгон бир касиет бар – алар өзүнө өзү окшош болушууда. Дарактан бутактар чыккандай, бул бутактардан да бутакчалар чыгат, бутакчалардан дагы майдараак бутакчалар чыгат, ж.у.с., башкача айтканда бутак бүтүндөй даракка окшош болууда. Кан тамыр системасы да ушул сыяктуу эле түзүлгөн: артериялардан артериолалар кетет, алардан органдарга жана ткандарга кычкылтекти жеткирүүчү майда капилярлар кетет. Ал эми деңиздин жээгинин космостук сүрөттөлүшүн карай турган болсок, булуңдарды жана аралдарды көрө алабыз. Ошону эле чымчык учкан бийиктиктен карасак, анча чоң эмес булуңду да, тумшукту да көрө алабыз. Эми өзүбүз суу жээгинде турабыз деп элестетип, бутубуздун алдын карайлы, анда жарым-жартылай сууга кирип турган таштарды да көрө алабыз. Башкача айтканда, мында да масштабды чоңойтууда суунун жээгинин өзүнүн өзүнө окшоп жаткандыгын байкоого болот. Ошондой эле тоонун ар бир бөлүгү да кайра эле чоң тоонун өзүнө окшош формада экендигин көрүүгө болот.

Жогорудагы суроону илимпоздор эзелтен эле берип келишкен, бирок ага ынанаарлык жооп таба алышпагандыктан, бул формаларды “иреттелген эмес”, “изилденбөөчү” түшүнүктөргө кошуп келишкен. 1960-1970-жылдары мындай объектилердин жалпылыгын түшүндүрүүчү теорияны түзүү менен америкалык математик Бенуа Мандельброт (1824-2010) дүйнөлүк бурулуш жасаган. Бул болсо тегиз, жылма, түз болбогон, одуракай, өңгүл-дөңгүл, шуудуракай болгон бизди курчап турган объектилерди изилдөөчү жаңы теория – фракталдык геометрия болду. Ошентип, Мандельброт жаратылыштын татаал формаларынан таң калыштуу иретүүлүктү тапты. Объектилердин өзүнө өзү окшош болгон касиетин ал *фракталдуулук* деп, ал эми объектилердин өзүн *фракталдар* деп атаган.

Фрактал сөзү fractus деген латын сөзүнөн алынып, бизче которгондо *фрагменттерден түзүлгөн, бөлүкчөлүргө бөлүнгөн* дегенди түшүндүрөт. Бенуа Мандельброт регулярдуу эмес, бирок өзү-өзүнө окшош түзүлүштөрдүн үстүндө иштегендиктен, мындай түзүлүштөрдү атоо үчүн 1975-жылы фракталдар деген терминди киргизген. Фракталдык геометриянын пайда болушун Мандельброттун 1977-жылы жарык көргөн “*The Fractal Geometry of Nature”* (“Жаратылыштын фракталдык геометриясы”) аттуу китеби менен байланыштырууга болот.

Азыркы мезгилде фракталдардын компьютердик графикадагы ролу өтө чоң. Мисалы, алар өтө татаал формадагы сызыктарды жана беттерди чийүүдө жардам берет. Компьютердик графиканын көз карашында фракталдык геометрия жасалма булуттарды, тоолорду, деңиздин бетин “жаратууда” алмаштыргыс жардамчы болуп саналат. Сүрөттөлүштөрү чыныгы объектилерге окшогон евклиддик эмес объектилердин элесин түзүүнүн методдору табыла баштады. Фракталдардын негизги касиеттеринин бири болуп, алардын өзү-өзүнө окшоштугу болуп саналат. Фракталдын кичинекей эле бөлүкчөсү, бүтүндөй фрактал жөнүндө маалымат берет. Фракталга Мандельброт төмөндөгүдөй аныктоо берген: *“Кандайдыр бир мааниде жалпылыкты берген майда бөлүктөрдөн турган структура фрактал деп аталат”*

“Фрактал” термини бул математикалык түшүнүк болбогондуктан, анын так математикалык аныктамасы жок.

Фракталдарды регулярдык жана регулярдык эмес деп экиге бөлүүгө болот. Регулярдык фракталдар элестетүүдөн, кыялдан алынган математикалык абстракциядан жаратылган болуп саналат. Мисалы, Кохтун кар бүртүгү, Серпинскийдин үч бурчтугу (кийинки параграфтарда токтолобуз). Ал эми регулярдык эмес фракталдарга жаратылыштагы көрүнүштөр жана адамдын колунан жасалган нерселер кирет.

Бенуа́ Мандельбро́т 1924-жылдын 20-ноябрында Варшавада литвалык еврейлердин үй-бүлөсүндө төрөлгөн. 2010-жылдын 14-октябрында уйку безинин рагынан дүйнөдөн кайткан. Ал франциялык жана америкалык математик, фракталдык геометриянын түзүүчүсү, Вольфа сыйлыгынын физика боюнча лауреаты (1993) болгон.

Мандельброт лингвистика, оюндар теориясы, экономика, аэронавтика, география, физиология, астрономия, физика боюнча алектенген.

§2. Фракталдардын келип чыгыш тарыхы

“Фракталдарга” биздин ата-бабабыз эзелтен эле көңүл буруп келишкен. Алар өзүлөрүн бүтүндөй бир ааламдын кичинекей бөлүкчөсү деп карап келишкен. «Фрактал» түшүнүгү кыргыздардын таш доорунда эле пайда болгон оймо-чиймелеринде, санжырасында, жыл наамасында, адабий чыгармаларында да кездешет.

Фракталдык геометриянын биринчи идеялары 19-кылымда пайда боло баштаган. 1883-жылы немец математиги, логик, теолог, чексиз көптүктөр теориясынын негиздөөчүсү Георг Кантор (1845-1918) жөнөкөй кайталануучу процедуранын жардамында сызыкты байланышпаган чекиттердин көптүгүнө айланткан. Ал эми бул көптүк “Кантордун чаңы” деп атылып калган.

Фракталдар теориясынын математикалык базасы Бенуа Мандельброт төрөлгөнгө чейин эле пайда болгон. Бирок ал эсептөө техникалары пайда болгондон баштап өнүгө баштаган.

Италиялык математик Джузеппе Пеано (1858-1932) өзгөчө сызыкты түзгөн. Ал түзгөн сызык бүтүндөй тегиздикти каптап калгандыгы менен уникалдуу болуп саналган.

Кантордун чаңы бир ченемдүү сызыктан түзүлүп келип эле нөл ченемдүү чекиттердин көптүгүн берип калды, ал эми Пеанонун сызыгы бир ченемдүү сызыктан түзүлүп келип эле эки ченемдүү тегиздикти берип калды.

1886-жылы немец математиги Карл Вейерштрасс (1815-1897) эч бир чекитинде туундуга ээ болбогон функцияны тургузган. Бул функциянын графиги чексиз сынык сызык болгон. Сызыктын ар кандай бөлүгүн чоңойтуп кароодо, ал кайра эле сызыктын өзүндөй көрүнгөн.

1904-жылы швед математиги Хелге фон Кох (1870-1924) эч бир чекитинде жанымага ээ болбогон үзгүлтүксүз ийринин мисалын түзгөн жана ал Кохтун ийриси деп аталып калган. Ал эми тең жактуу үч бурчтуктун ар бир жагына түзүлгөн Кохтун үч ийриси Кохтун кар бүртүгү (Снежинка Коха) деп аталуучу туюк ийрини түзүшөт.

1915-жылы польшалык математик Вацлав Серпинский (1882-1969) Серпинскийдин ийриси, Серпинскийдин үч бурчтугу, Серпинскийдин килеми деп аталган конструкцияларды түзгөн.

Фракталдык касиетке ээ болгон жаратылыштын объектилиринин бири – суунун жээги экендигин жогоруда айтып өттүк. Суунун жээк сызыгынын узундугун эсептөө аракетине байланышкан жана Мандельброттун илимий макаласынын негизин түзгөн кызыктуу тарых сакталып калган. Бул тарых Мандельброттун “Жаратылыштын фракталдык геометриясы” деген эмгегинде да айтылып өткөн. Сөз белгилүү англис математиги, физик, метереолог жана психолог, аба-ырайын аныктоодо математикалык методду биринчилерден болуп пайдаланган Льюис Ричардсон (1881-1953) тарабынан жүргүзүлгөн эксперимент жөнүндө болууда. Анын изилдөөлөрүнүн дагы бир багыты болуп – эки касташкан мамлекеттин ортосундагы куралдуу чыр-чатактын келип чыгышынын себептеринин, анын пайда болуп кетүү ыктымалдуулуктарынын жана аларды токтотуунун математикалык сүрөттөлүшүн берүү саналган. Анын математикалык эсептөөлөрүндөгү параметрлеринин ичине эки касташкан мамлекеттин жалпы чек арасынын узундугу да кирген. Ричардсон эсептөө эксперименттерине маалыматтарды чогултуп жатып, Испания менен Португалиянын жалпы чек аралары боюнча маалыматтар түрдүү булактарда түрдүүчө экендигин байкаган. Бул болсо аны мамлекеттердин ортосундагы чек аранын узундугу биз өлчөп жаткан “сызгычтан” көз каранды деген ачылышка алып келген. Масштаб канчалык кичине болсо, чек ара ошончолук узун болгон. Себеби масштаб кичинертилген сайын жээктеги майда ийилүүлөр да эске алынып калган. Ошентип, объектинин чоңдугу аны өлчөөчү “сызгычтан” көз каранды болуп калган.

1975-жылы Мандельброт “Улуу Британиянын деңиз жээгинин узундугу кандай?” деген эмгегин жарыкка чыгарган. Ушул эмгекте фракталдар тууралуу алгачкы изилдөөлөр жазылган. Өзүнүн илимий иш аракетинин башталышында Мандельброт IBM компаниясынын илим изилдөө борборунда эмгектенген. Ошол борбордун кызматкерлери маалыматтарды алыс аралыкка жөнөтүү боюнча эмгектенишкен. Изилдөөлөрдүн негизинде илимпоздор ызы-чуулук тоскоолдуктардын айынан маалыматтарды жөнөтүүдө көптөгөн жоготуулар болуп жаткандыгына туш болушкан. Бенуанын алдына статикалык метод эффективдүү болбой калган кезде электрондук схемалардагы ызы-чуулук тоскоолдуктардын пайда болуп жаткан себептерин табуу маселеси коюлган. Ызы-чууну өлчөнүн жыйынтыгынан таң калаарлык мыйзам ченемдүүлүккө көңүл бурган – ызы-чуунун графиги ар түрдүү масштабда бирдей эле көрүнгөн. Ызы-чуунун графиги бир жумада, бир күндө же бир саатта алынганына карабай бирдей болгон. Графиктин масштабын өзгөртүүдө деле бирдей эле сүрөттөлүш алына берген. Улум-улам фактыларды салыштырып олтуруп, ал математикадагы жаңы багытты ачты.

Фракталдык сүрөт бирдей элементтерге ээ болбойт, бирок ар кандай масштабда окшоштуулук касиетине ээ болот. Мындай сүрөттү кол менен түзүү мүмкүн болбогон, ал өтө көп эсептөөлөрдү талап кылган. Мисалы, француз математиктери Пьер Фату (1878-1929), Гастон Жулиан (1893-1978) мындай көптүктөр жөнүндө Мандельброттун ачылышына чейин эле айтышкан. Компьютердик технология пайда болгондон баштап мындай көптүктөрдүн сүрөттөлүшүн берүү жеңилдеген. Ушул көптүктөрдүн жардамында Мандельброт өзүнүн көптүгүн түзүп, анын графикалык жагын тургузуу менен фракталдын биринчи сүрөтүн алган. Ошондой эле өзүнө окшоштуулук принциби Лейбництин, Пол Левинин жана Георг Кантордун эмгектеринде да айтылган.

Ушул илимпоздордун эмгектери да Бенуа Мандельбротко жаңы теорияны – фракталдарды ачууда жардам берген. Ал буга чейинки жогорудагы айтылган ачылыштарды системалаштыргандыгы менен тарыхта «Фракталдардын атасы» деген ат менен калды.

Бенуа Мандельброт формулалар менен иштебегендигин, болгону картиналар менен гана «ойноп» жаткандыгын бир нече жолу айткан. Бул кишинин мейкиндик ой жүгүртүүсү өтө жогорку деңгээлде болгондуктан, ар кандай алгебралык маселени геометрия жакка которо алган.

Мандельброттун фракталдарды ачышы менен адамзат өзүнүн бүтүндөй фракталдар менен курчалган экендигин түшүнө баштады.

§3. Фракталдардын түрлөрү

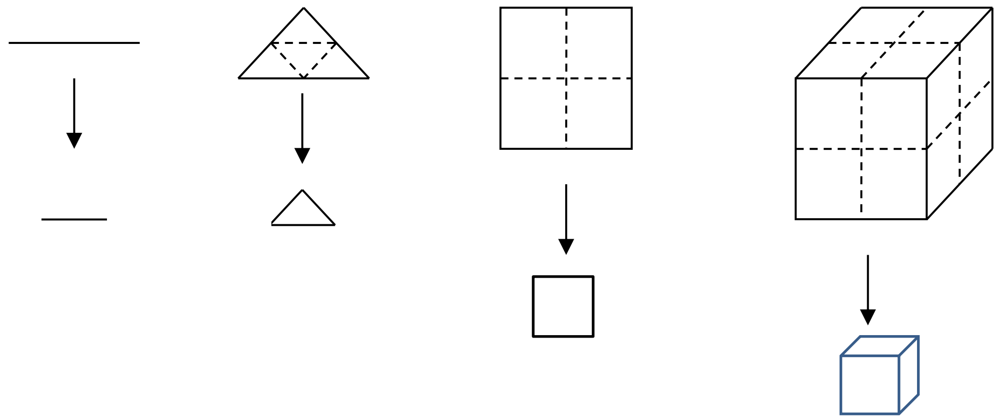
Фракталдарды чоң үч топко бөлүүгө болот: геометриялык фракталдар, алгебралык фракталдар жана стохастикалык фракталдар.

Геометриялык фракталдар

Дал ушул геометриялык фракталдардын негизинде фракталдардын тарыхы башталгандыгын жогоруда айтып кеттик. Фракталдардын ичинен ушул топтогу фракталдар эң көрүнүктүүсү деп эсептелинет.

Фигураны чектүү санда өзүнө окшош фигураларга кесүү мүмкүн болсо, анда мындай фигура *өзү-өзүнө окшош геометриялык фигура (тело)* деп аталат.

Мисалы, 1-сүрөттө: кесинди, тең жактуу үч бурчтук, квадрат, куб.



1-сүрөт

Бул топтогу фракталдарды түзүүгө токтололу.

Геометриялык фракталдар этап-этабы менен, б.а. жөнөкөй геометриялык түзүүлөрдүн жардамында түзүлөт. Алгач негиз деп аталуучу кесиндилердин (кесинди, үч бурчтук, төрт бурчтук ж.б.) тобу тургузулат. Аларды кандайдыр бир геометриялык фигурага өзгөртүп түзүүчү эрежелер пайдаланылат. Андан ары пайда болгон фигуранын ар бир бөлүгүнө ушул эле эрежелер кайталанып пайдаланылат. Улам кийинки кадамдар дал ушундайча аткарылат да, фигуранын сүрөттөлүшү татаалдаша берет. Ошентип, жогорудагы кадамдарды чексиз аткаруу менен геометриялык фракталга ээ болобуз.

Негизди жана эрежелерди алмаштыруу менен ар түрдүү геометриялык фракталдарды алабыз.

Геометриялык фракталдар бир жагынан илимий изилдөөнүн предмети болуп саналат, экинчи жагынан математиканы түшүнбөгөн адам да алардан өзүнө бир нерсе ала алат. Мындай өзгөчөлүк – объектилери баарына эле түшүнүктүү боло бербеген сөздөр жана символдор менен берилген учурдагы математикада сейрек кездешет. Көрсө, көптөгөн геометриялык фракталдарды чакмак кагаздын бетинде эле түзүүгө болот экен.

Кээ бир жөнөкөй геометриялык фракталдарды түзүүгө токтололу.

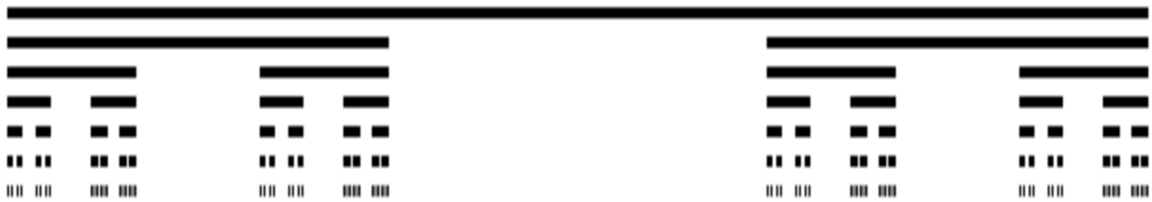
Кантордун чаңы (Пыль Кантора)

Бул фракталды түзүү үчүн төмөнкү кадамдарды аткарабыз:

1-кадам. Бирдик узундуктагы кесиндини үч бөлүккө бөлүп, ортоңкусун алып таштайбыз;

2-кадам. Калган эки кесиндини үч бөлүккө бөлүп, булардын да ортоңкуларын алып коебуз.

Мындай кадамдарды чексиз улантуу менен 2-сүрөттөгү көптүккө ээ болобуз.



2-сүрөт

Касиеттери.

1. Түзүүдөгү пределдик кесиндилердин узундуктарынын суммасы нөлгө барабар болот.

Далилдөө. Биринчи алып таштаган кесиндинин узундугу $\frac{1}{3}$ ге, кийинки алып таштаган кесиндилердин узундуктарынын суммасы $\frac{2}{9}$ ге барабар ж.у.с. Ошентип, натыйжада алып ташталган кесиндилердин узундуктарынын суммасы 1 ге барабар болот:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

2. Кантордун чаңы оң узундукка ээ болгон интервалдарга ээ эмес.

Далилдөө. Кесиндилерди улам алып таштай берели. Калган n кесиндинин узундуктарынын суммасы n чексизге умтулганда нөлгө умтулушу 2-касиеттен келип чыгат.

3. Кантордун чаңы өзүнө өзү окшош көптүк болот.

Түзүүдөн келип чыгат.

4. Кантордун чаңынын интервал менен кубаттуулугу бирдей.

Көптүктүн элементтеринин саны анын *кубаттуулугу* деп аталат.

Эгерде эки көптүктүн чекиттеринин ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулса, анда мындай эки көптүк *бирдей кубаттуулукка* ээ болушат деп айтылат.

5. Кантордун чаңы компактуу, кынтыксыз жана байланышсыз көптүк.

Эгерде көптүк чектелген жана туюк болсо, анда ал *компактуу* деп аталат.

Эгерде көптүк өзүнүн чек аралык чекиттерин кармап турса, анда ал *туюк* деп аталат.

Өзүнүн пределдик чекиттеринин көптүгү менен дал кедген туюк көптүк *кынтыксыз* деп аталат.

Бир да интервалды кармабаган көптүк (ички чекиттерди кармабаган) көптүк *байланышсыз* көптүк деп аталат.

(Жогорудагы көптүктөрдүн математикалык так аныктамалары функционалдык анализде, топологияда берилет).

Пеанонун ийриси (Гректик крест)

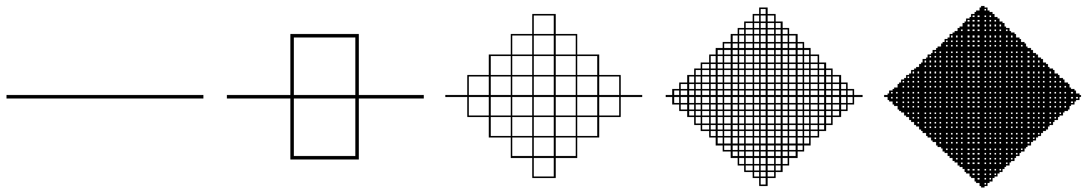
Бул фракталды түзүү үчүн төмөнкү кадамдарды аткарабыз:

1-кадам. Бирдик узундуктагы кесиндини 3-сүрөттө (экинчи кадамдагы сүрөтүндө) көрсөтүлгөн бирдей чоңдуктагы 9 кесиндиге бөлөбүз. Алардын ар биринин узундугу берилген кесиндинин узундугунан 3 эсе кичине болот;

2-кадам. Пайда болгон 9 кесиндинин ар бирин дагы жогорудагыдай 9 кесиндиге бөлөбүз.

Мындай кадамдарды чексиз улантуу менен 3-сүрөттөгү көптүккө ээ болобуз.

Акырында бул сызык бүтүндөй тегиздикти каптап калган.



3-сүрөт

Кохтун триадалык ийриси

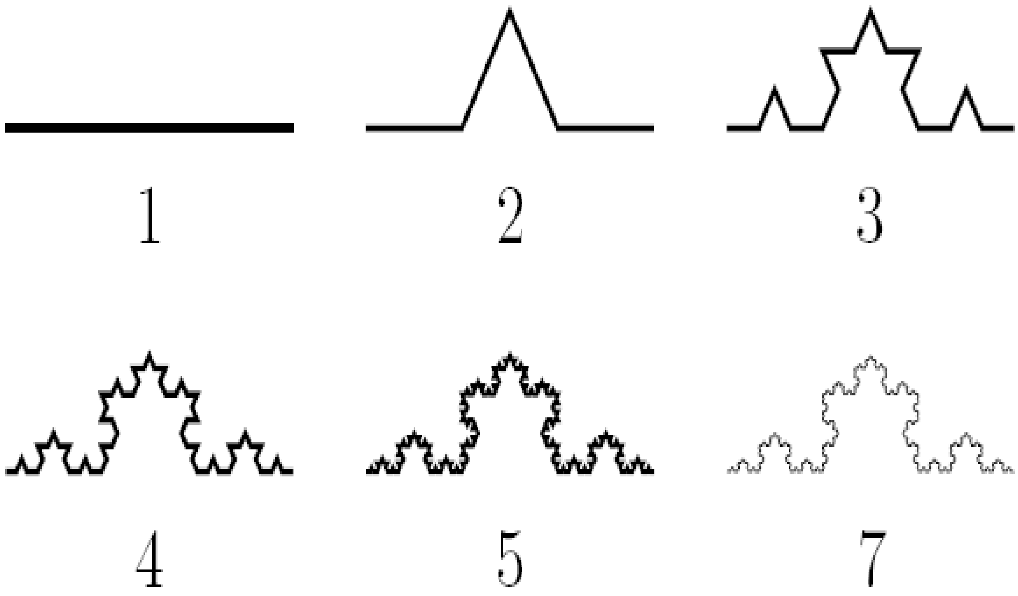
4-сүрөттө Кохтун ийрисин түзүүнүн кадамдары көрсөтүлдү.

1-кадам. Кесиндини тең үч бөлүккө бөлүп, ортоңкусунан тең жактуу үч бурчтук түзөбүз да, негизин алып таштайбыз (төрт кесиндиден турган сынык сызык пайда болот);

2-кадам. Пайда болгон сынык сызыктын ар бир кесиндисине 1-кадамдагы эреже кайталанат (мында 16 кесиндиден турган сынык сызыкка ээ болобуз).

Андан кийин сүрөттөгү 4-кадамды аткарабыз. Мындай кадамдарды чексиз улантуу менен Кохтун ийрисине ээ болобуз.

Кохтун ийрисинин ар бир алгачкы кесиндиси өзүнө окшош 4 кесиндиден турат жана алардын ар биринин узундугу берилген кесиндинин узундугунан үч эсе кичине болот.



4-сүрөт

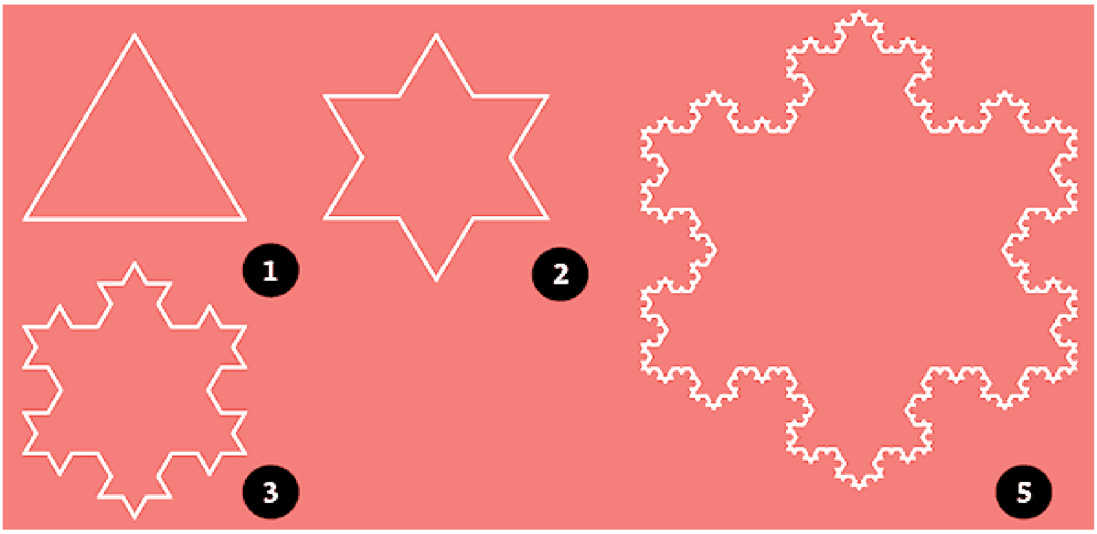
Кохтун кар бүртүгү (Снежинка Коха)

Жагы a га барабар болгон тең жактуу үч бурчтуктун жагы боюнча (чексиздикке чейин) төмөндөгү процессти аткаралы:

Сынык сызыктын чокуларын туташтыруучу ар бир кесиндини үч бөлүккө бөлөбүз жана ортоңку бөлүгүн узундугу $a/3$кө барабар болгон эки кесинди менен алмаштырабыз, мында a берилген кесиндинин узундугу. Мындай түзүүнүн алгачкы бир нече кадамы 5-сүрөттө көрсөтүлдү.

Кандайдыр бир n-кадамда ийри ар кесиндисинин узундугу $\frac{a}{3^n}$ барабар болгон $N = 3N = 3\cdot 4^n$ кесиндиден турган кандайдыр бир сынык сызыкты берип калат жана анын толук узундугу $L = 3a\left(\frac{4}{3}\right)^n$ барабар болот.

Кыскача айтканда, тең жактуу үч бурчтуктун ар бир жагына Кохтун ийрисин тургузуу менен Кохтун бүртүгү деп аталуучу көптүккө ээ болобуз.



5-сүрөт

Т – квадрат (Т фрактал)

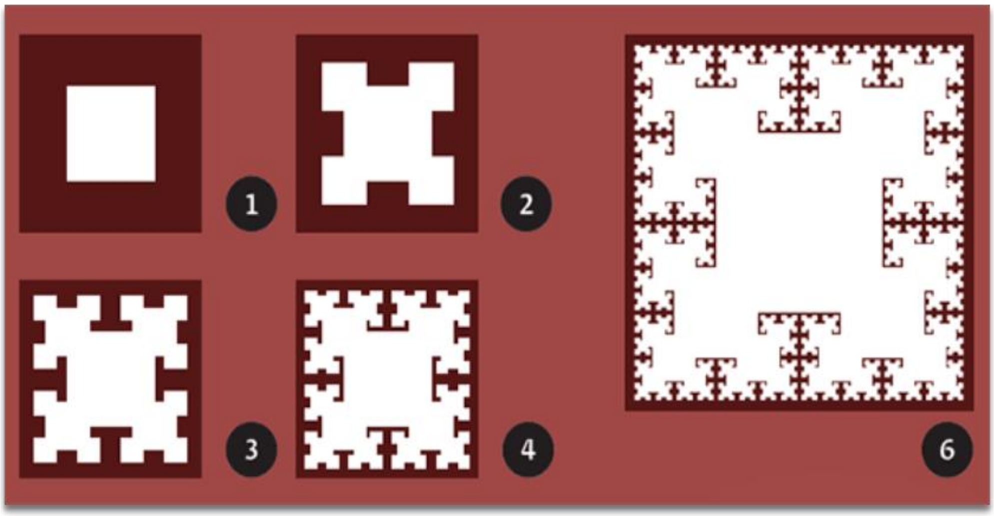
Бул фрактал “Т” тамгасына окшогондугунан ушундай аталып калган. Т-фракталын түзүүнү көрсөтөлү (6-сүрөт).

1-кадам. Бирдик узундуктагы кызыл квдраттын ичине жагы $\frac{1}{2}$ге барабар болгон ак квадратты сызабыз;

2-кадам. Ак квадраттын чокулары борборунда жата тургандай жана чоңдугу бул квадраттын чоңдугунан 4 эсе кичине болгон төрт ак квадратты сызабыз;

3-кадам. Сызылган төрт ак квадраттын ар бирине дагы ушундайча кылып 4 ак квадрат сызып чыгабыз. Натыйжада 16 майда квадрат пайда болот;

Пайда болуп жаткан квадраттардын ар бирине ушул эрежени аткара беребиз.



6-сүрөт

Н – фрактал

Бул фрактал “Н” тамгасына окшогондугунан ушундай аталып калган. Н–фракталын түзүүнү көрсөтөлү (7-сүрөт).

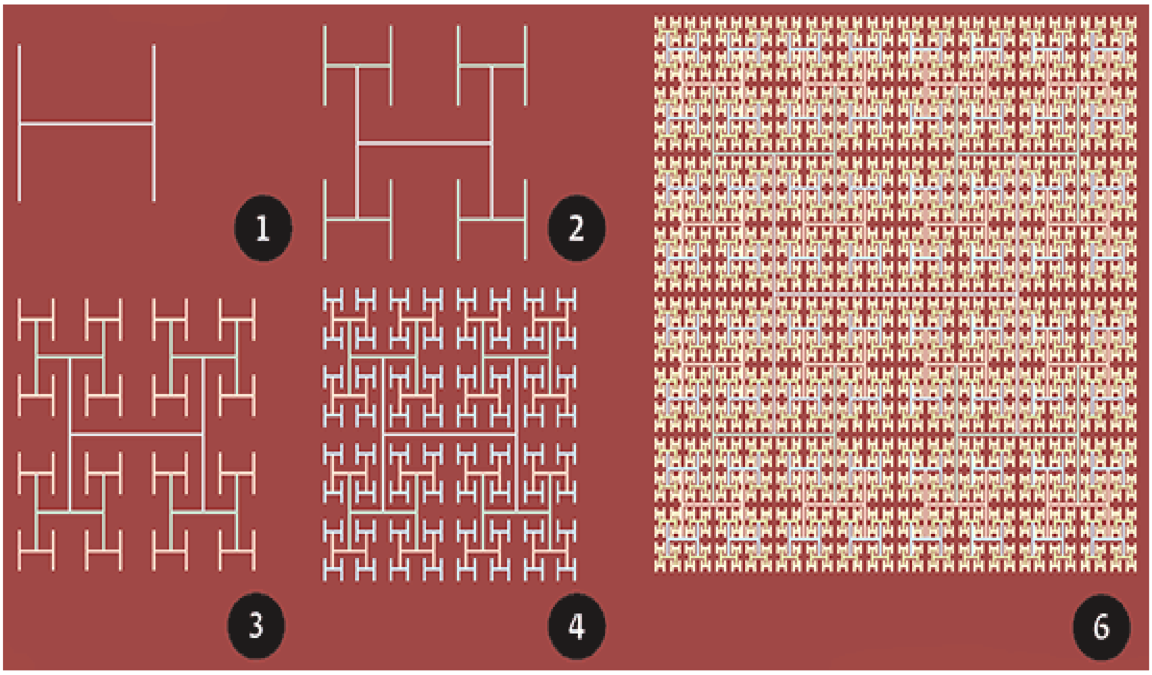
1-кадам. Горизонталдык жана вертикалдык кесиндилери барабар болгон Н тамгасына окшогон фигураны сызабыз;

2-кадам. Бул фигуранын ар бир тңрт учуна узундугу мындан 2 эсе кичине болгон, фигуранын өзүнө окшош фигураларды сызабыз;

3-кадам. Пайда болгон фигуранын 16 учуна берилген фигурадан эми 4 эсе кичине болгон, фигуранын өзүнө окшош фигураларды сызабыз;

Ушул кадамдарды чексиз улантуу менен кандайдыр бир толтуруп калгандай фракталга ээ болуп калабыз.

Н-фрактал электрондук микросхемаларды өндүрүүдө пайдаланылат. Эгерде татаал системада көп сандаган элементтер бир убакта эле бир сигналды бирдей кабыл алуусу керек болсо, анда бул элементтерди Н-фракталдай схеманын кесиндилеринин учтарына жайгаштырылат.



7-сүрөт

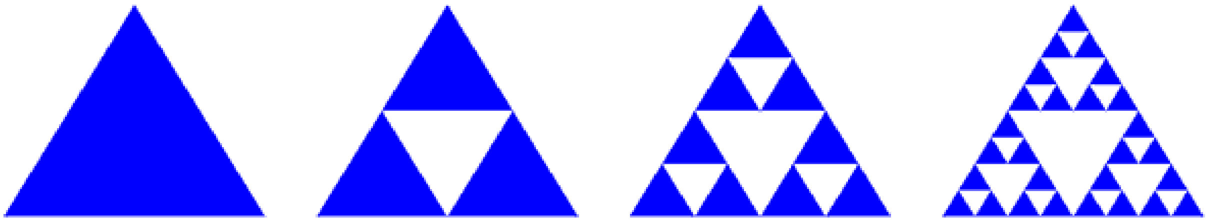
Серпинскийдин үч бурчтугу

Серпинскийдин үч бурчтугун түзүү эрежеси төмөндөгү 8-сүрөттөн көрүнүп турат:

1-кадам. Тең жактуу үч бурчтук түзөбүз;

2-кадам. Берилген тең жактуу үч бурчтуктун жактарынын орто чекиттерин туташтырууда, берилген тең жактуу үч бурчтук 4 тең жактуу үч бурчтукка бөлүнөт. Ортодогу үч бурчтукту алып таштайбыз;

3-кадам. Калган үч тең жактуу үч бурчтуктун жактарынын орто чекиттерин туташтырууда, ар бир үч бурчтук дагы 4 тең жактуу үч бурчтукка бөлүнөт. Алардын да ортодогуларын алып таштайбыз ж.у.с.



8-сүрөт

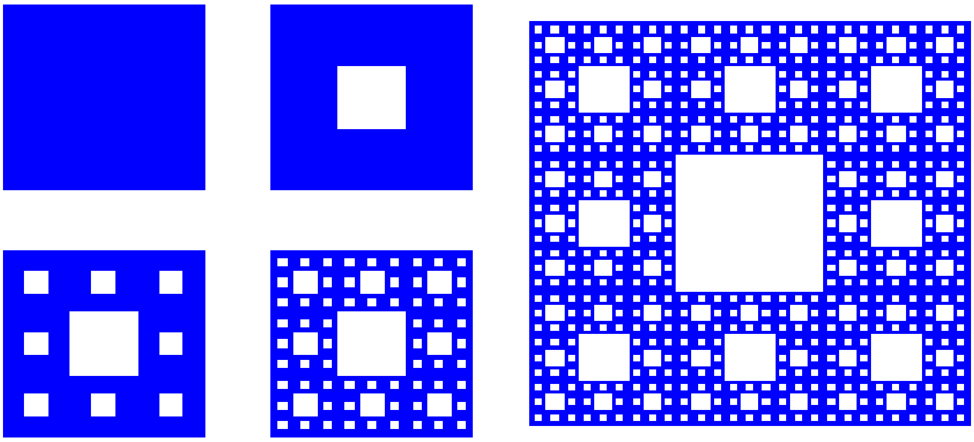
Серпинскийдин квадраты (килеми)

Серпинскийдин квадратын түзүү эрежеси Серпинскийдин үч бурчтугун түзүү эрежеси сыяктуу жүргүзүлөт. Ал төмөндөгү 9-сүрөттөн көрүнүп турат:

1-кадам. Квадрат түзөбүз;

2-кадам. Берилген квадратты барабар 9 квадратка бөлүп, ортодогу квадратты алып таштайбыз;

3-кадам. Калган сегиз квадраттын ар бирин дагы барабар 9 квадратка бөлүп, ортодогусун алып таштайбыз ж.у.с.



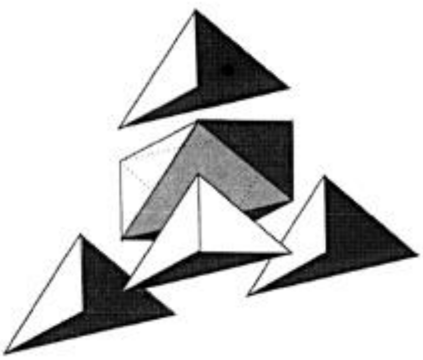
9-сүрөт

Серпинскийдин пирамидасы

Бул фрактал Серпинскийдин үч бурчтугунун мейкиндиктеги аналогу болуп саналат.

1-кадам. Туура тетраэдр тургузабыз;

2-кадам. Бул тетраэдрден грандары берилген тетраэдрдин грандарынан эки эсе

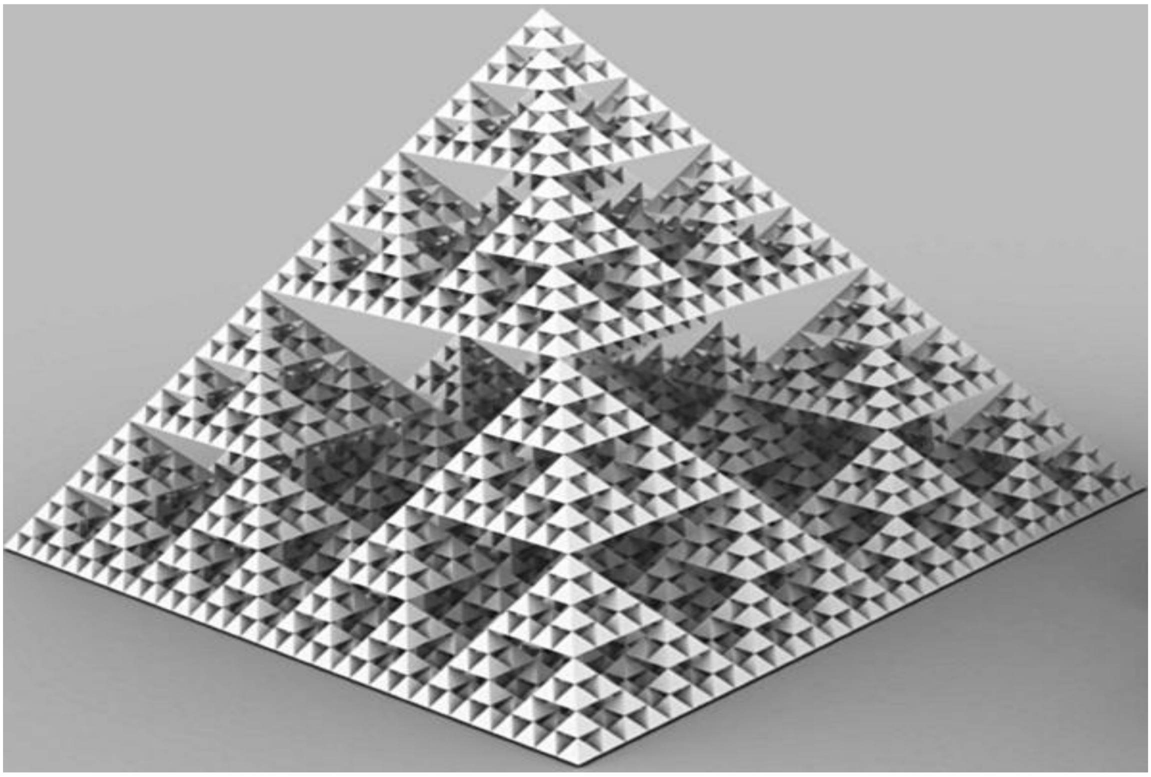


10-сүрөт

кичине болгон 4 туура тетраэдр кала тургандай кылып, октаэдр кесип алабыз (10-сүрөт).

3-кадам. Пайда болгон 4 тетраэдрдин ар биринен ушундайча кылып октаэдр кесип алабыз ж.у.с.

Натыйжада 11-сүрөттөгү фракталга ээ болобуз.



11-сүрөт

Менгердин болпогу (Губка Менгера)

Менгердин болпогу да Серпинскийдин квадратынын мейкиндиктеги аналогу болуп саналат. Бул фракталды түзүүнү карайлы (12-сүрөт).

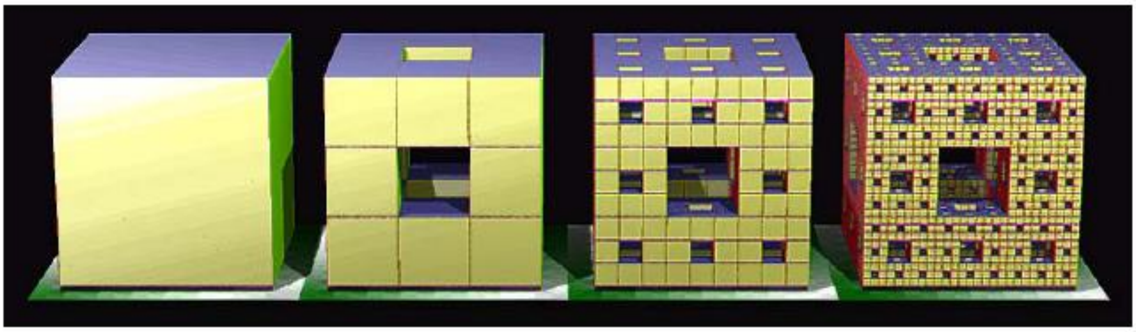
1-кадам. Куб тургузабыз;

2-кадам. Кубдун ар бир гранын 9 квадратка бөлөбүз. Натыйжада берилген куб 27 майда кубга бөлүнүп калат;

3-кадам. 27 кубдун ичинен кубдун борборундагы жана 6 грандын ар биринин борборлорундагы кубдарды алып коебуз. Натыйжада берилген кубда көзөнөкчөлөр пайда болуп калат да, 20 кубдан турган фигурага ээ болобуз;

4-кадам. Калган 20 кубдун ар бирине да ушул эрежени пайдаланабыз ж.у.с.

Натыйжада Менгердин болпогу деп аталуучу фракталга ээ болобуз.



12-сүрөт

Пифагордун дарагы

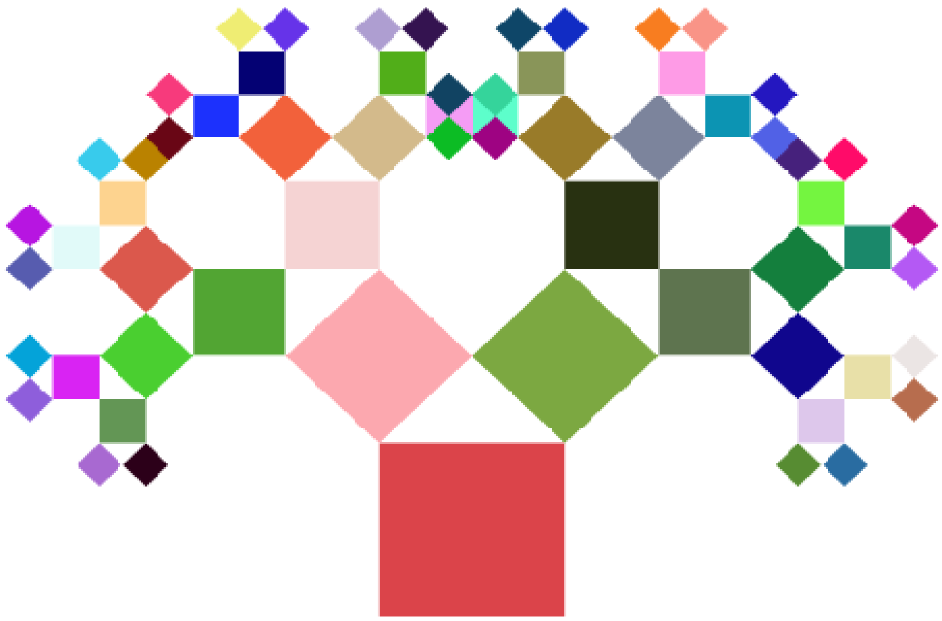
Бул фрактал кантип тургузула тургандыгына токтололу (13-сүрөт).

1-кадам. Квадраты алабыз;

2-кадам. Берилген квадраттын бир жагына гипотенузасы квадраттын жагына дал келген тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтук түзөбүз;

3-кадам. Түзүлгөн үч бурчтуктун катеттерине квадраттарды тургузабыз.

Андан ары процесс ушул квадраттар үчүн кайталанат.



13-сүрөт

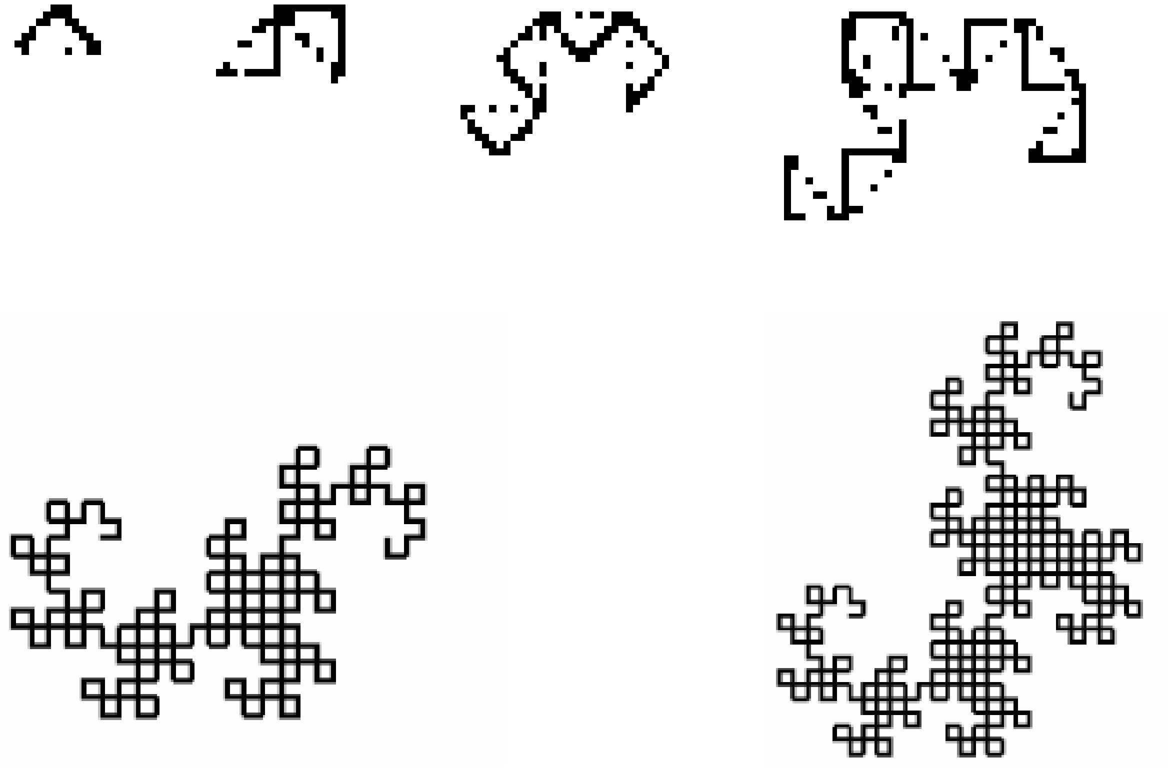
Хартер-Хейтуэйдин дракону

Бул фракталды тургузууну карайлы (14-сүрөт).

1-кадам. Берилген кесиндини жогору караган тең жактуу тик бурч менен алмаштырабыз. (Ушул тик бурч фракталды түзүүчү элемент болот);

2-кадам. Ущул түзүүчү элементтин сол кесиндисинин төмөн жагында, андан кийин оң кесиндинин жогору жагына дагы ушундай түзүүчү элемент (тик бурчтукта) тургузулат. Мында сол жакты жана төмөн жакты караган эки тик бурчтан турган фигурага ээ болобуз;

Андан ары процесс ушул тик бурчтар үчүн кайталанат. 14-сүрөттө түзүүнүн 4 кадамы, 8 жана 11 кадамы көрсөтүлдү



14-сүрөт

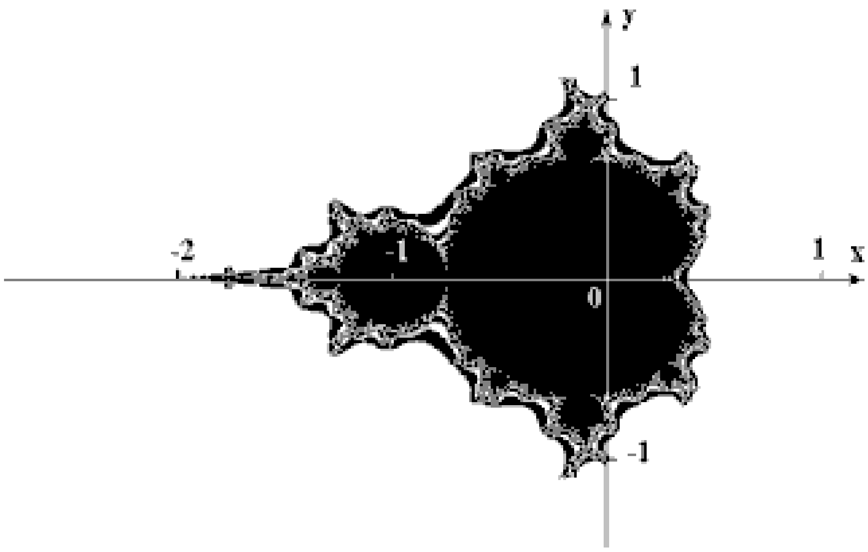
Алгебралык фракталдар

Бул класс фракталдардын эң чоң группасы. Алар алгебралык формулалардын негизинде тургузулат. Алгебралык фракталдарды алуунун бир нече методу бар. Ал методдордун бири болуп – $Zn + 1 = f(Zn)$ функциясын итерациялык (кайталап) эесптөө болуп саналат. Мында Z комплекстик сан, ал эми f кандайдыр бир функция. Берилген функцияны кайталап эсептөө берилген шарт аткарылганга чейин жүргүзүлөт. Бул шарт аткарылып бүткөндө экранга чекит чыгарылат. Мында функциянын маанилери ар бир комплекстик чекит үчүн ар башка абалда: чексизге кетиши, 0 гө умтулушу, бир нече бекемделген маанилерге ээ болушу, башаламан абалда болушу мүмкүн.

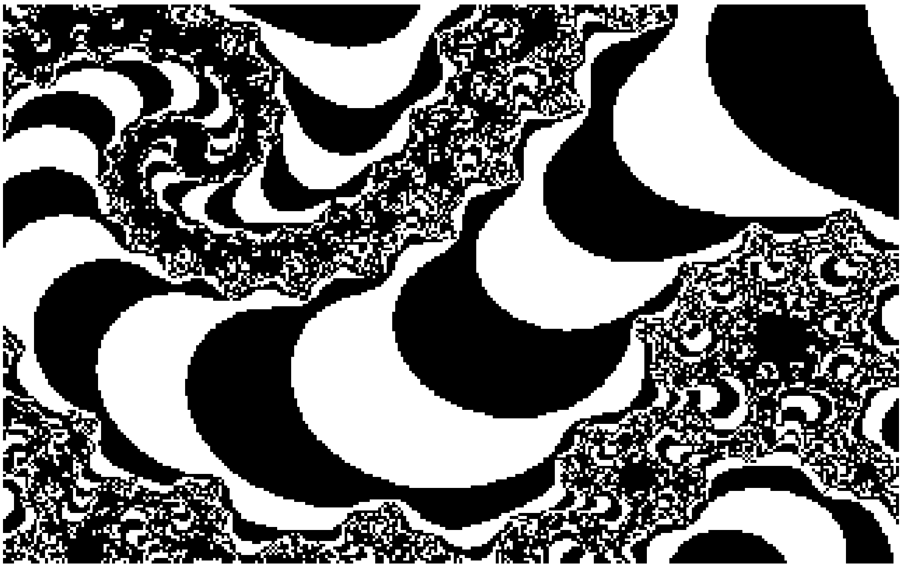
Агебралык фракталдар n-ченемдүү мейкиндиктеги сызыктуу эмес процесстердин жардамында алынат. Мында эки ченемдүү процесстер көбүрөөк изилденген. Сызыктуу эмес итерациялык процессти дискреттик динамикалык система катары интерпретациялап, бул системалардын теориясынын терминдерин пайдаланууга болот: фазалык портрет, орнотулган процесс, аттрактор ж.б.

Сызыктуу эмес динамикалык система бир рече туруктуу абалга ээ экендиги белгилүү. Бир нече итерациядан (кайталануу) кийинки динамикалык системанын абалы, анын алгачкы абалынан көз каранды болот. Ошондуктан ар бир туруктуу абал (аттрактор) баштапкы абалдардын кандайдыр бир аймагына ээ болот. Ошентип, системанын фазалык мейкиндиги аттракторлордун тартылуу аймагына бөлүнөт. Эгерде фазалык мейкиндик эки ченемдүү болсо, анда тартылуу аймактарын ар түрдүү түстөр менен боеп олтуруп, бул системанын түстүү фазалык портретине ээ болобуз. Түстөрдү өзгөртүү менен таң калыштуу түрдүү түстүү татаал фракталдык картиналарга ээ болобуз. Жөнөкөй алгоритмдер менен өтө татаал тривиалдуу эмес структураларды түзүү мүмкүн экендиги математиктерди таң калтырууда.

Мисал катары Мандельброттун көптүгүн карайлы. Аны түзүүнүн алгоритми өтө жөнөкөй жана төмөндөгү жөнөкөй итерациялык туюнтма менен берилет: Z[i+1] = Z[i]*Z[i] + C, мында Z[i] жана C – комплекстик өзгөрүлмөлөр. Ачып көрсөткөндө $Z_0 = 0$, $Z_1 = {Z_0}^2 + C, \dots, Z_{n+1} = {Z_n}^2 + C$ туюнтмаларына ээ болобуз. Итерация комплекстик тегиздиктин камтылуучу көптүгүнүн квадраттык же тик бурчтуу аймагынын С баштапкы чекитинен башталат. Итерациялык процесс Z[i] борбору (0, 0) чекитинде болгон, радиусу 2ге барабар айлананын сыртына чыкканга чейин (бул болсо, динамикалык системанын аттрактору чексизде дегенди түшүндүрөт) же чоң сандагы итерациядан кийин (мисалы, 200-500) Z[i] айлананын кандайдыр бир чекитине жыйналганга чейин улантылат. Z[i] айлананын ичинде боло тургандай итерациянын санына жараша С чекитинин түсүн аныктоого болот. Эгерде чоң сандагы итерацияда С чекити айлананын ичинде кала берип, итерация аяктаса, анда бул чекит кара түс менен боелот.



15-сүрөт. Мандельброттун көптүгү



16-сүрөт. Мандельброттун көптүгүнүн чек арасынын 200 эсе чоңойтулган тилкеси.

Жогоруда айтылган алгоритм Мандельброттун көптүгүнө жакындоону берет. Чексиз сандагы итерацияда чексизге кетпеген чекиттер Мандельброттун көптүгүнө кирет (кара түскө ээ болуучу чекиттер). Көптүктүн чегине таандык болгон чекиттер (ушул жерде татаал структура түзүлөт) чектүү итерацияда чексизге кетишет, ал эми көптүктүн сыртында жаткан чекиттер бир нече эле итерациядан кийин чексизге кетишет (ак түс).

Мандельброттун көптүгүнөн башка Жюлианын көптүгү, Галилейдин көптүгү, Ньютондун көптүгү деп аталган алгебралык фракталдарды айтууга болот.

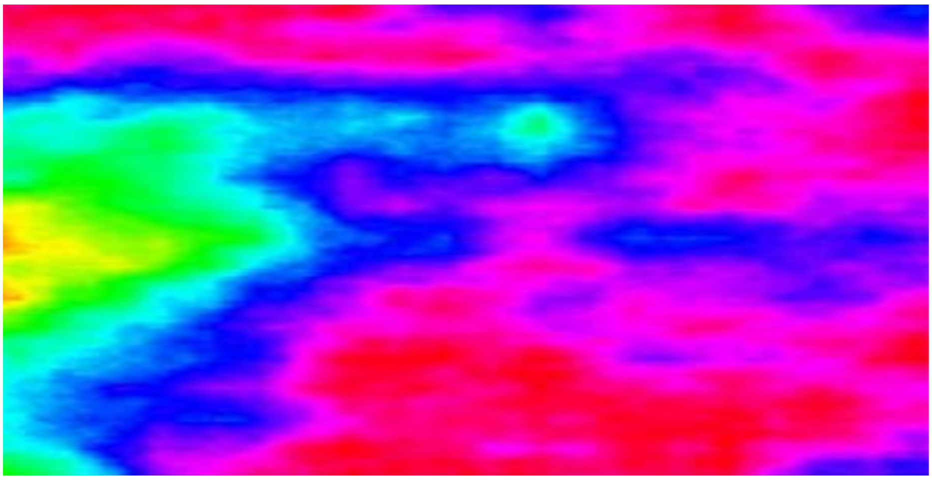
Стохастикалык фракталдар

Итерациялык процессте параметрлерди каалагандай өзгөртүүдөн пайда болгон фракталдар, стохастикалык (кокустук) фракталадар деп аталышат. Бул учурда жаратылышта кездешүүчү симметриялык эмес объектилерге окшогон сүрөттөлүштөр алынат.

Эки ченемдүү стохастикалык фракталдар жер бетинин рельефин жана деңиздин бетинин сүрөттөлөштөрүн берүүдө колдонулат.

Стохастика гректин “stochazomai” сөзүнөн алынып, ал бизче божомолдоо дегенди түшүндүрөт.

Төмөндөгү плазманын сүрөттөлүшү стохастикалык фракталга мисал боло алат.



17-сүрөт

§4. Ченемдүүлүк түшүнүгү

Биз күнүмкү жашообузда ченемдүүлүк менен кездешип турабыз. Көзүбүзгө көрүнүп турган жолдун узундугун, бөлмөбүздүн аянтын, идиштин көлөмүн ж.б. болжолдуу айта алабыз.

Кесиндини N барабар бөлүккө бөлөлү. Анда кесиндинин бөлүнгөн ар бир бөлүгүн анын $\frac{1}{r}$ эсе кичинертилген түспөлү (копиясы) катары кароого болот. Бул учурда N жана r параметрлери $N \cdot r = 1$ катышы менен байланышат (18-сүрөт).

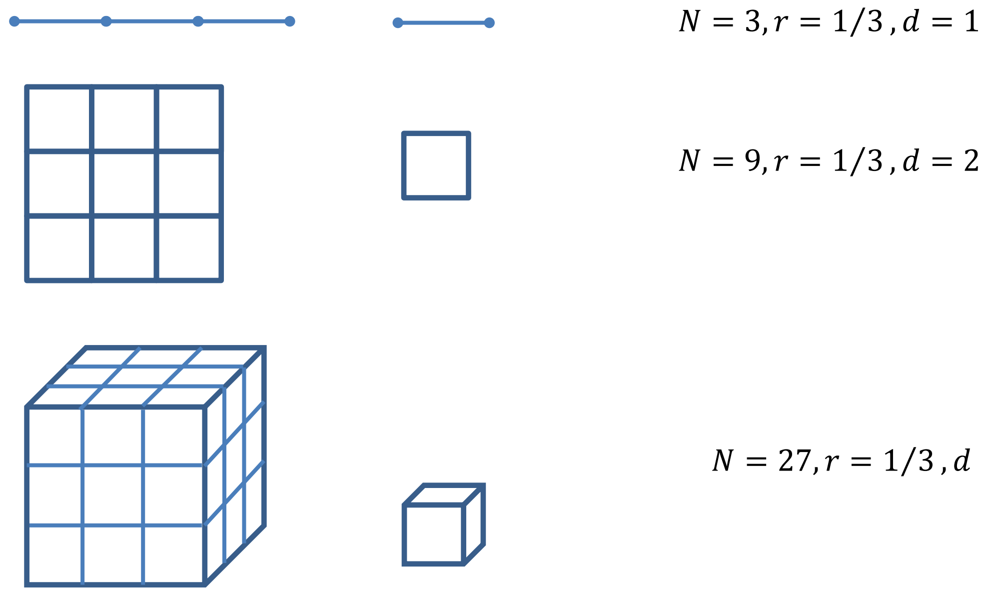
Эгерде квадратты N барабар квадраттарга бөлсөк, анда жогорудагы катыш бул учур үчүн $N \cdot r^2 = 1$ түрдө болот. Мында бөлүнгөн квадраттардын аянты берилген квадраттардын аянтынан $\frac{1}{r^2}$ эсе кичине болот.

Эгерде кубду N барабар кубдарга бөлсөк, анда жогорудагы катыш бул учур үчүн $N \cdot r^3 = 1$ түрдө болот. Мында бөлүнгөн кубдардын көлөмү берилген кубдун көлөмүнөн $\frac{1}{r^3}$ эсе кичине болот.

Жогорудагы катыштардан объектинин d ченеми анын бир ченемдүү кесинди, эки ченемдүү квадрат, үч ченемдүү куб болгондо деле r дин даражасы аркылуу берилип жаткандыгы көрүнүп турат. Демек, d-ченемдүү объект үчүн жогорудагы катыштарды жалпылап, барабар бөлүкчө объектилердин саны N менен “окшоштук коэффициенти” r дин ортосундагы катышты

$$N \cdot r^d = 1 \qquad (1)$$

көрүнүшүндө алууга болот экен.



18-сүрөт

18-сүрөттөгү көптүктөр бүтүн ченемге ээ болушууда. (1) барабардыктагы d көрсөткүчү бүтүн болбогон түзүү жашайбы деген суроо туулат. d көрсөткүчү бүтүн болбогон көптүктөр жашайт, алар өзү-өзүнө окшош болгон фракталдар деп аталышат. d көрсөткүчү фракталдык ченемдүүлүк деп аталат. Ушул көрсөткүчтү табалы. Ал үчүн (1) барабардыктын эки жагын тең логарифмалап жиберели. Анда төмөнкү барабардыкка ээ болобуз:

$$d = \frac{logN}{log\frac{1}{r}} \tag{2}$$

Мында логарифмди бирден айырмалуу болгон ар кандай оң негизи менен алууга болот.

Эгерде фрактал өзүнө окшош кесилишпөөчү камтылуучу көптүктөрдөн туруп, бирок окшоштук коэффициенти камтылуучу көптүктөрдө бирдей болбосо, анда фракталдын ченемин (2) формула менен табуу туура болбой калат.

1-мисал. Кохтун ийрисинин фракталдык ченемдүүлүгүн тапкыла.

Кохтун ийрисин түзүү 4-сүрөттө көрөтүлдү. Мында берилген кесинди тең үч бөлүккө бөлүнүп, натыйжада 4 кесинди пайда болууда. Берилген кесиндинин бөлүктөрү өзүнө караганда 3 эсе кичине ($r = \frac{1}{3}$), ал эми алардын саны $N = 4$. Анда өзүнө-өзү окшоштук катышы (2) көрсөтүлгөн N жана r үчүн аткарылат. Ал эми Кохтун ийрисинин фракталдык ченеми төмөнкүгө барабар:

$$d = \frac{log4}{log3} \approx 1{,}2618.$$

2-мисал. Серпинскийдин үч бурчтугунун фракталдык ченемдүүлүгүн тапкыла.

Серпинскийдин үч бурчтугун түзүүдө берилген үч бурчтук бирдей чоңдуктагы 3 үч бурчтукка бөлүнгөнү (N=3) 8-сүрөттөн көрүнүп турат. Бул үч бурчтуктар берилген үч бурчтуктан эки эсе кичине болгондуктан, окшоштук коэффициенти $r = \frac{1}{2}$ болот. Анда Серпинскийдин үч бурчтугунун фракталдык ченемдүүлүгү

$$d = \frac{log3}{log2} \approx 1{,}5850$$

болот.

§5. Ар кандай фигуранын аянттын эсептөө

Фигуранын аянтын эсептөөнүн дагы бир жолуна токтололу. Фигураны чакмак баракка сызып, бул фигуранын ичинде калган чакмактардын санын эсептейбиз. Фигуранын аянты болжол менен фигуранын ичинде калган чакмактардын санын бир чакмактын аянтына көбөйткөнгө барабар болот.

Фигуранын аянтын чакмактардын жардамында эмес, фигуранын ичинде жана чек арасында жаткан чакмактардын чокулары болуп саналышкан чекиттердин саны боюнча табууну карайлы.

n – фигуранын ичиндеги, m – чек арасындагы чекиттердин (чакмактардын чокуларынын) саны болсун. Анда фигуранын аянты чакмактын аянтынын бирдиги менен төмөндөгүдөй табылат:

$$S = n + \frac{m}{2} - 1. \quad (3)$$

Бул формуланы 1899-жылы Георг Пинк келтирип чыгарган.

3-мисал. 19-сүрөттөгү фигуранын аянтын тапкыла.

Мында $n = 18,\ m = 16$ болгондуктан, $S = 18 + \frac{16}{2} - 1 = 25$ болот. Каралып жаткан фигура үчүн бул так жооп болуп саналат.

4-мисал. 20-сүрөттөгү фигуранын аянтын тапкыла.

20-сүрөттөгү фигуранын аянтын табуу үчүн алгач чек аралык чекиттердин минималдык санын, б.а. фигуранын нак чек арасында жатканын эсептейбиз. Ички чекиттер тегерекчелер менен, алардын саны $n = 3$, чек аралык чекиттер «+» белгиси менен көрсөтүлдү, алардын саны $m = 5$. Андан кийин чек аралык чекиттердин максималдык саны эсептелинет. Мында фигуранын чек арасына жакын жайланышкан сырткы чекиттердин саны алынат, бул учурда алардын саны $m = 9$. Эсепке A, B, C, D чекиттери кирди. Ошентип,

$$min: n = 3, m = 5 \Rightarrow S_1 = 4{,}5,$$

$$max: n = 3, m = 9 \Rightarrow S_2 = 6{,}5.$$

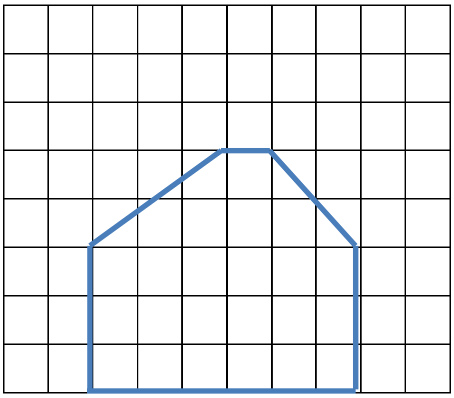
Бул маанилер фигуранын аянтынын биринчи тактыктагы маанилери болуп саналат.

$$S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) = 5{,}5.$$

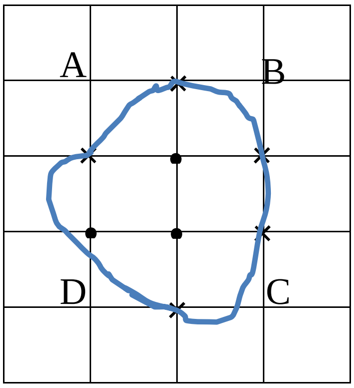
Бул маани фигуранын анык аянтына жакыныраак экинчи тактыктагы маани болот.

(3) формула фигуранын ичинде тешикчелер болбогон учурда туура болот. Эгерде фигура k сандагы тешикчелерге ээ болсо, анда бул формуланы төмөндөгүдөй түрдө жазып алууга болот:

$$S = n + \frac{m}{2} - 1 + k \tag{4}$$



19-сүрөт



20-сүрөт

§6. Фракталдардын колдонулуштары

Илимдеги улуу ачылыштар биздин жашообузду аябай өзгөртүүгө жөндөмдүү. Мисалы, вакцинаны ойлоп табуу көптөгөн адамдарды сактап калуусу мүмкүн, ал эми жаңы табылган ок-жарак көптөгөн өмүрдү кыйышы мүмкүн. Жакында эле адамзат учурда жашоосун ансыз элестете албаган электр жарыгын тапты. Бирок ушундай чоң ачылыштардын жаралышына көмөкчү болгон көмүскөдө калган ачылыштар да бар. Ошондой ачылыштардын бири болуп фракталдар эсептелинет.

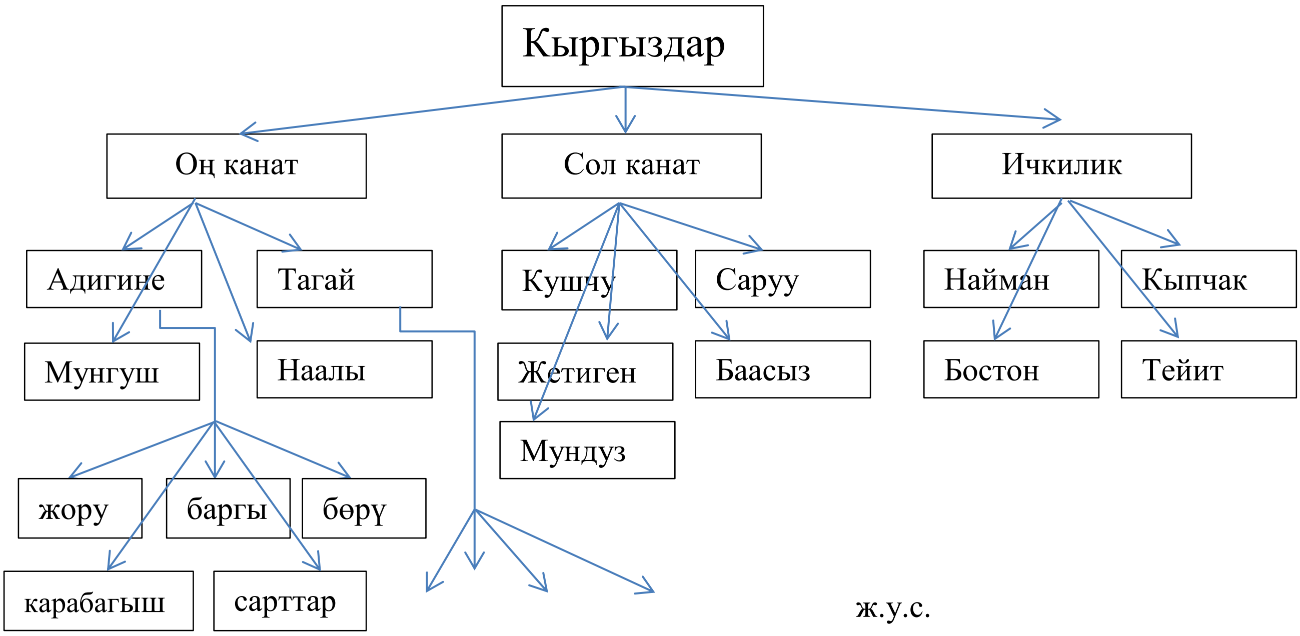
Мандельброт фракталдык геометрия дисциплинасын жаратуу менен бирге аны илимдин башка аймактарына жайылтууга да жетишти.

Фракталдар чыныгы жаратылышты туура сүрөттөгө жардам бергендиктен, аларды илимде жана техникада колдонуу кеңири таралууда.

Кыргыздардын тарыхында кездешүүчү фракталдар

Санжыра – араптардын "чажара" сөзүнөн алынган. Бизче которгондо "дарак" дегенди түшүндүрөт. Эл, уруу, урук тууралуу ооз эки баян.

Санжыраны айтуудагы негизги максат — бир туугандардын ортосундагы, уруулардын ортосунда, ошонун негизинде бүт бир элдин ортосунда бирдикти, биримдүүлүктү, ынтымактуулукту сактоого, аларды биримдүү кылып баш коштуруу болуп келген. Биздин ата-бабаларыбыз санжыраны айтууда мына ушул багытта пайдаланып келишкен. Алар уруу, уруктук аң-сезиминин тамыры бошоң элдин этнос катары туруксуз, алсыз болорун билишкен. Ошондуктан алар нечен кылымдар бою өзүнүн кыргыз улутун, кыргыз уруусун бириктирип, душмандарын талкалап, көз карандысыз жашаган улут катары сактап келишкен. Ар бир уруу жогоруда айтылган жалпы касиеттерге таянып жашап келет.



21-сүрөт

Мында да жалпы кыргыз элине тиешелүү болгон үрп-адаттар, салт-санаалар ар бир урууда, ар бир урукта, ар бир үй-бүлөдө сакталып, кайталанып келет (21- сүрөт).

Кыргыздардын жыл сүрүүсүндөгү фракталдар

Жыл сүрүү – салттуу турмушта мезгилдин агымын, окуянын мөөнөтүн, кишинин жашын ж.б. эсептөө ыкмасы. Кыргыздарда жыл сүрүү кайталанма мүнөзгө ээ. Кыргыздын элдик жыл сүрүүсү 12 жаныбардын аты менен аталган (чычкан, уй, жолборс, коңн, балык, жылан, жылкы, кой, мечин, тоок, ит, доңуз). Мында бирдей мүчөлдөгү адамдардын мүнөзүндө окшоштуктар болот деп айтылып келет.

Кыргыздардын кол өнөрчүлүгүндө кездешүүчү фракталдар

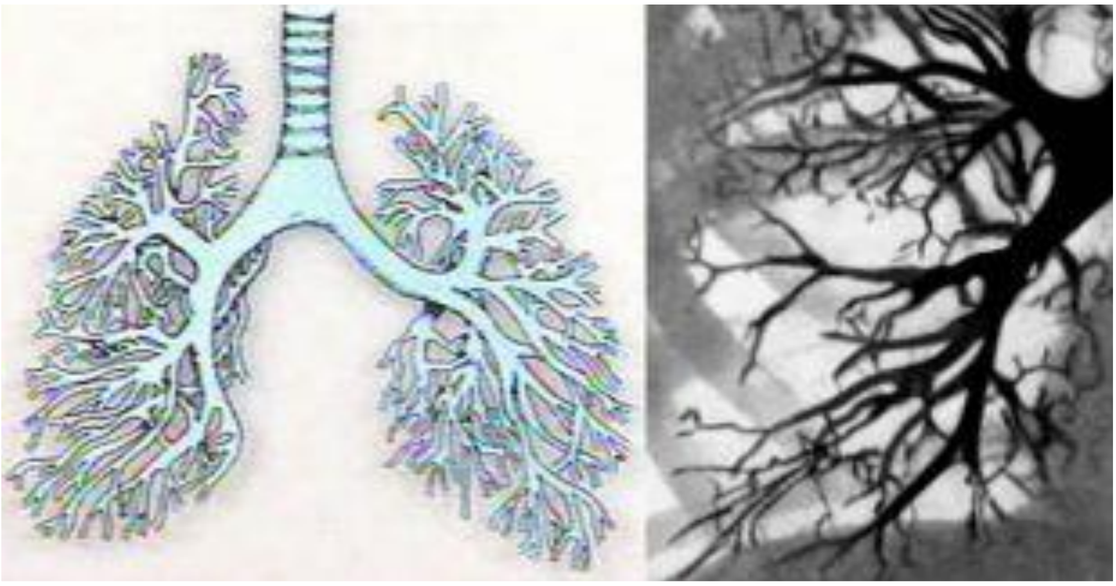
Ата-бабабыздын эзелки көчмөн турмушундагы үй-тиричилигин көркүнө чыгарган элдик уздар жана чеберлер кийиз менен булгаары бетине, жыгач менен темир бетине кыргыздын улуттук оюм-чийимдерин түшүрүп, көз жоосун алган көрктүү буюмдарды жаратып келишкен. Чындыгында кыргыздын улуттук боюмдарын оймо-чиймесиз көз алдыга элестетүү мүмкүн эмес болуп калды. Бул оймо-чиймелердеги бир эле элементтин кайталануусу фракталдуулукту берет (22-сүрөт).

22-сүрөт

Медицинада кездешүүчү фракталдар

Адамдын организми фрактал түрдөгү структуралардын көптүгүнөн турат: кан тамыр системасы, булчуңдар, бронхтор, нерв системасы ж.б. (23-сүрөт).

Ошондуктан илимпоздор фракталдык алгоритмдерди кандайдыр бир ооруну аныктоо үчүн жана аны айыктырууда колдонууга боло тургандыгын көрсөтүүгө жетишти. Мисалы, фракталдар теориясын электрокардиограммаларды талдоодо, гастроэнтерологияда колдонуу мүмкүн.



23-сүрөт

Табигый илимдердеги фракталдар

Фракталдар геологияда жана геофизикада кеңири колдонулушка ээ болууда. Фракталдык анализ кен байлыктардын жайгашкан жерлерин табууда жана иштетүүдө, сейсмологияда, магниттик талааларды изилдөөдө, толкундардын таралышын үйрөнүүдө, климатты аныктоодо, аба-ырайын билүүдө жардам берет.

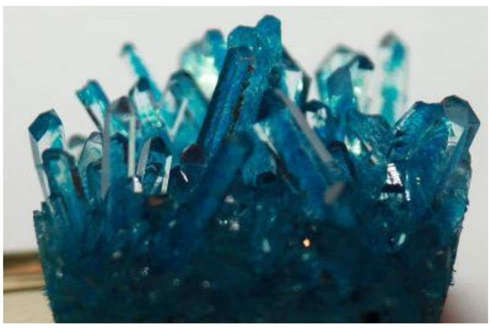
Фракталдык теориянын жардамында континеттердин жана аралдардын суу жээктеринин узундуктарын тагыраак өлчөө мүмкүн болууда. Мында Мандельброттун алгачкы ачылыштарынын бири «чексиз аралдарга» токтололу. Эгерде биздин сызгычыбыздын узундугу 100 м болсо, анда аралдын тегеретесине 19 даанасы жетет, ал эми аралдын суу жээгинин узундугу 1900 м болот. Эгерде сызгычтын узундугу 10 м болсо, анда ал булуң-бурчтарды да ченеп кетет да, суу жээгине 242 сызгыч талап кылынат, жээктин узундугу 2420 м болуп калат. Эгерде суунун жээгинин узундугун узундугу 1мм болгон сызгыч менен ченесек, анда суунун жээгиндеги ар ташты да эске алууга туура келет. Мындай ченөөдө жээктин узундугу 5423 м болуп калат (24-сүрөт).

24-сүрөт

Ошентип, фракталдык түшүнүк илимпоздорго Британиялык аралдардын суу жээктеринин узундуктарын жана ченелбей жаткан объектилердин узундуктарын өлчөөгө жардам берди.

Фракталдар физикада да кеңири колдонушка ээ. Мисалы, катуу телолордун физикасында фракталдык алгоритмдер катуу, майда тешиктүү телолордун касиеттерин аныктоодо колдонулат.

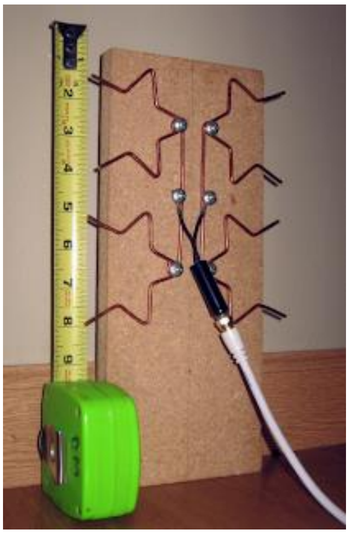
Бул болсо өзгөчө жана пайдалуу касиеттерге ээ болгон жаңы материалдарды түзүүгө жардам берет.



25-сүрөт

Катуу телонун мисалы бул кристалл (25-сүрөт).

Телекоммуникациядагы фракталдар



26-сүрөт

Маалыматтарды алыс аралыкка берүүдө фракталдык формадагы өлчөмү жана салмагы жагынан кичине болгон, көп диапазондуу жана көп тилкелүү антенналар колдонулууда. Антенналык түзүлүштөрдү жасоодо фракталдык геометрияны биринчилерден болуп американлык инженер Натан Коэн пайдаланган. Натан алюмийден жасалган фольгадан Кохдун ийрисинин формасындагы фигураны кесип алып, кагазга жармаштырган да приемникке туташтырган. Ал өзүнүн антенна чыгаруу боюнча компаниясын түзгөн. Ошондон бери фракталдык антенналарды чыгаруу интенсивдүү өнүгүүдө (26-сүрөт).

Компьютердик графикадагы фракталдар

Компьютердик графикадагы фракталдар геометриялык фракталдар бак-дарактардын, бадалдардын, жээк сызыктарынын сүрөттөлүштөрүн алуу үчүн, ал эми эки ченемдүү геометриялык фракталдар көлөмдүү текстураларды (беттеги сүрөттү) түзүү үчүн колдонулат.

Жаратылышта кездешүүчү фракталдар: суу жээги, булуттар, тоолор, дарак, аяз, кар бүртүкчөсү, чагылган, кристаллдар, кораллдар, деңиз жылдызчасы, деңиз раковинасы, брокколи, түстүү капуста, ананас ж.б.

Күнүмдүк жашоо-турмушубузда кездешүүчү фракталдар

Фракталдар теориясын жашооңу тигил же бул туура жол менен кетирүүдө зарыл болгон чечимди кабыл алууда да пайдаланылат. Мисалы, Поршиа Нильсондун «Беш кыскача главадан турган автобиографиясына» токтололу:

I глава

Мен көчө менен бара жатам.

Тротуарда терең аң бар.

Мен ага түшүп кеттим.

Мен өзүмдү жоготтум. Мен алсызмын.

Бул менин күнөөм эмес.

Мага мындан чыгуу үчүн көп убакыт керек.

II глава

Мен дагы эле ошол көчө менен бара жатам.

Тротуарда терең аң бар.

Мен аны көрмөмүш болдум.

Мен ага дагы түшүп кеттим.

Менин ошол жерде дагы болуп калганыма ишенбей турам.

Бул менин күнөөм эмес.

Мага мындан чыгуу үчүн дагы да көп убакыт керек.

III глава

Мен дагы эле ошол көчө менен бара жатам.

Тротуарда терең аң бар.

Мен анын бар экенин көрдүм.

Мен бары бир түшүп кеттим... Бул – адат.

Менин көздөрүм ачык.

Мени каерде экенимди көрүп турам.

Бул менин күнөөм.

Мен андан тез арада чыгып кеттим.

IV глава

Мен дагы эле ошол көчө менен бара жатам.

Тротуарда терең аң бар.

Мен аны айланып өтүп кеттим.

V глава

Мен башка көчө менен бара жатам.

Фракталдык группаларга төмөнкү түшүнүктөрдү да киргизүүгө болот:

Аалам – галактика –күн системасы – планеталык система – зат – молекула – атом;

Кылым – жыл – ай – жума – күн – саат – минута – секунда;

Эл – раса – улут – уруу – үй бүлө – мен;

Окуу жайы – жогору окуу жайы – университет – факультет – адистик – курс – группа – студент.

Ошондой эле фракталдар архитектурада, дизайнда, кино индустриясында, живописте, адабиятта, деги эле илимдин бардык тармагында кеңири колдонушка ээ болуп келүүдө.

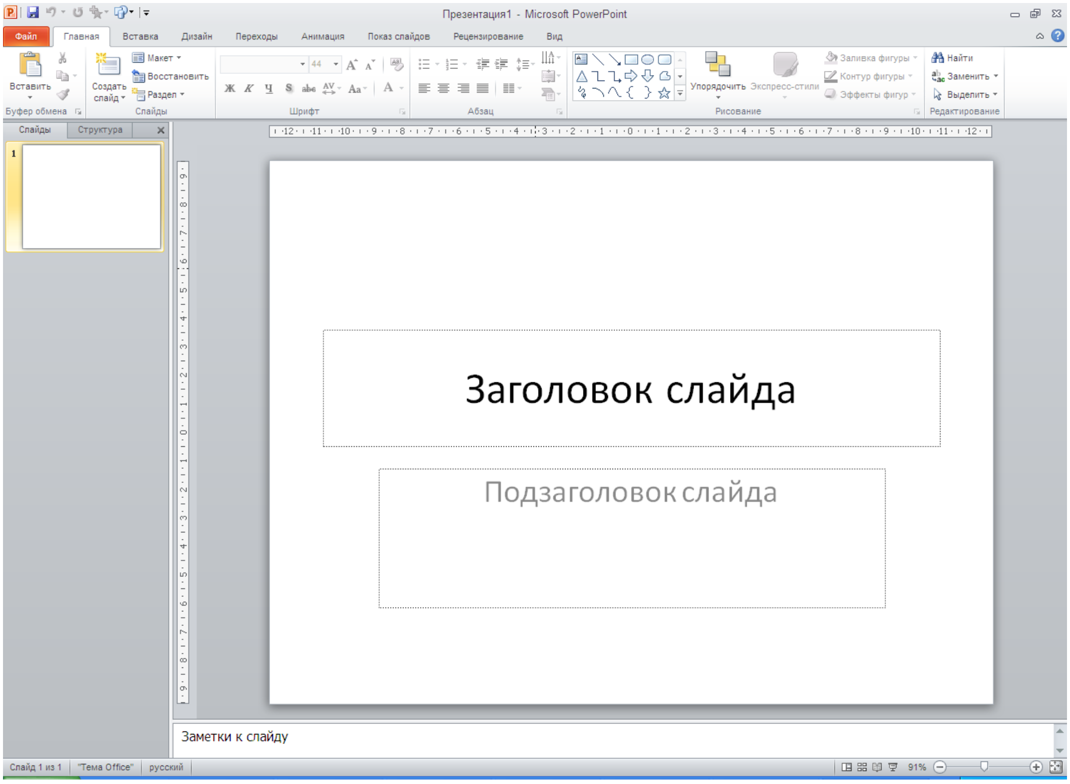
§7. Геометриялык фракталдарды PowerPoint программасында түзүү

Фракталдар компьютердик технологиялардын пайда болушу менен жеңил түзүлө башталды. Фракталдарды компьютердик түрдүү программаларды түзүү мүмкүн. Аларды элементтерин удаалаш сызуу аркылуу же итерациялык формулалардын жардамында берүүгө болот.

Биз бардыгыбызга пайдаланууга жеңил жана түшүнүктүү болгон компьютердик PowerPoint программасында Ош мамлекеттик университетинин профессор Г.Матиева тарабынан түзүлгөн «Пределдик квадрат» деп аталган геометриялык фракталды түзүүнү карайлы.

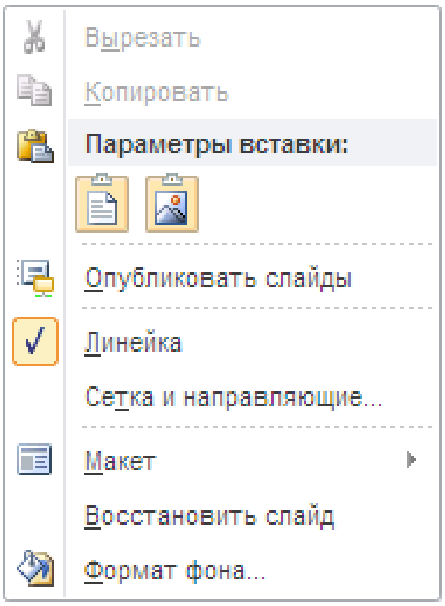
Ал үчүн PowerPoint программасына киребиз. Мында автоматтык түрдө төмөндөгүдөй жумушчу барак пайда болот (27-сүрөт).

Жумушчу барагыбызды фракталды чийүү үчүн даярдап алабыз. Ал үчүн **“Заголовок слайда”** деген терезечеге фракталдын аталышын киргизебиз да, **“Подзаголовок слайда”** терезечесин алып таштайбыз. Курсорду жумушчу баракка коюп, чычканчанын оң клавишасын бассак, 6-сүрөттөгү панель пайда болот.

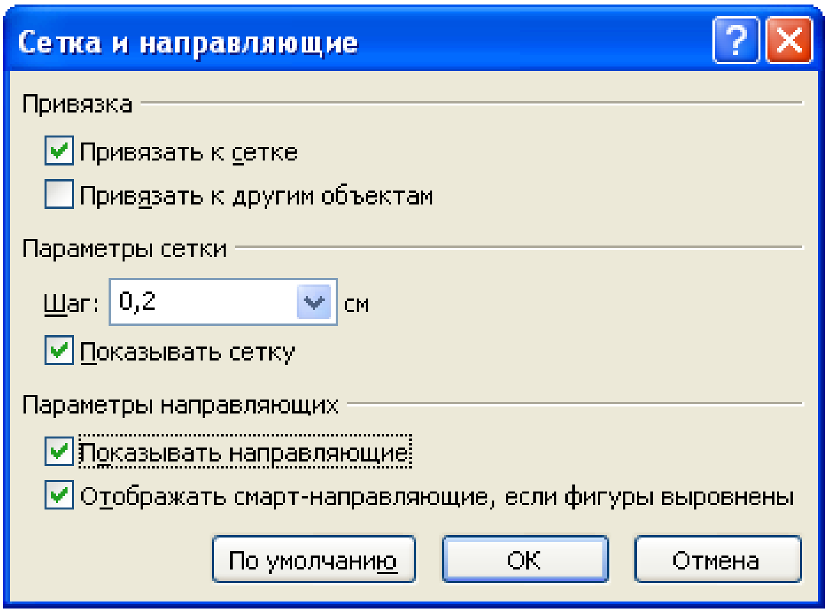


27-сүрөт

28-сүрөттөгү “**Линейка”** тиркемесине чымчыкча коебуз, мында жумушчу баракчанын жогору жагында шкалалар пайда болот. Бул болсо квадраттын жагынын узундугун көрсөтүп турат. Андан соң ушул эле панелдеги **“Сетка и направляющие”** тиркемесине кирсек, 29-сүрөттөгү панель пайда болот. Мында көрсөтүлгөн чымчыкчаларды белгилейбиз. Ушул эле панелдеги “**Шаг”** деген терезечедеги бирдик – торчодогу 1 сантиметрде канча чекит бар экендигин түшүндүрөт.

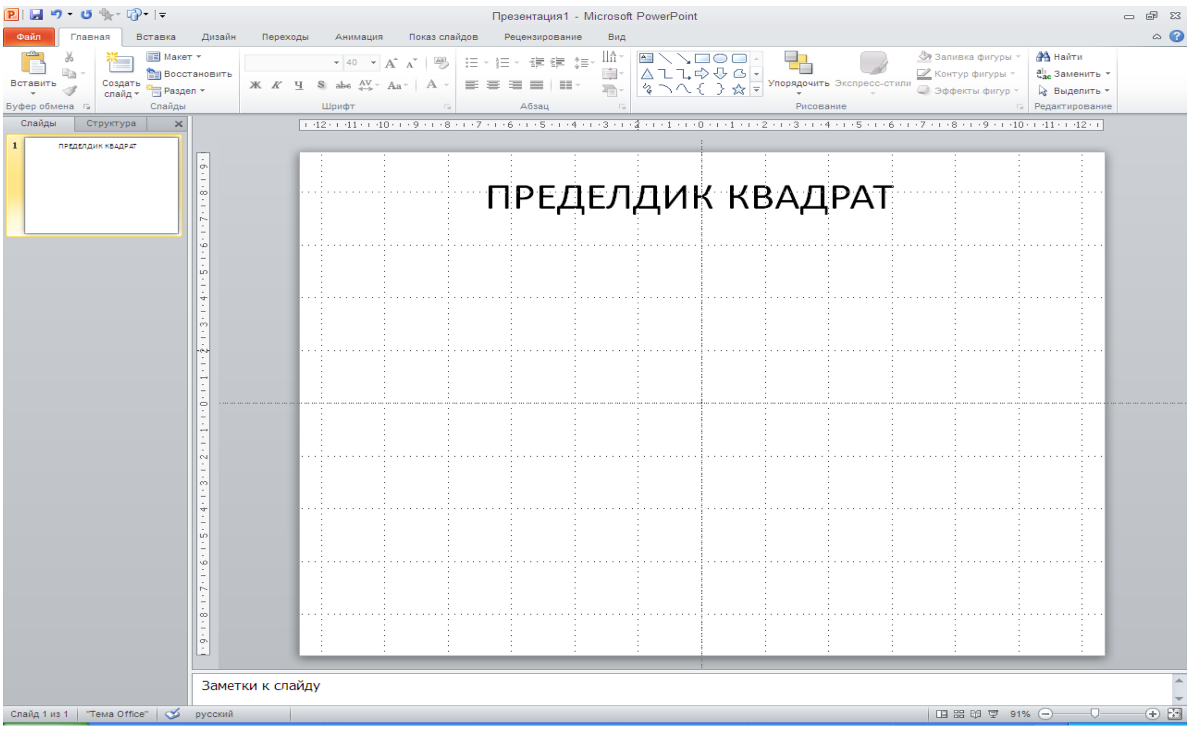


28-сүрөт



29-сүрөт

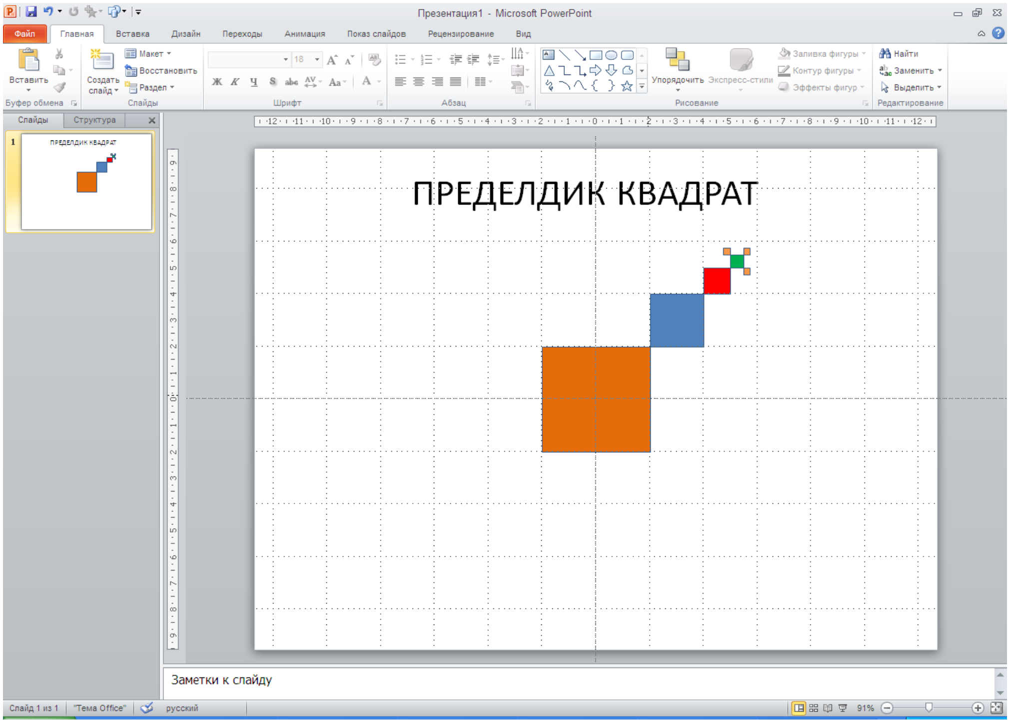
Бул белгилөөлөрдөн кийин жумушчу барак төмөндөгүдөй көрүнүшкө келип калат (30-сүрөт):



30-сүрөт

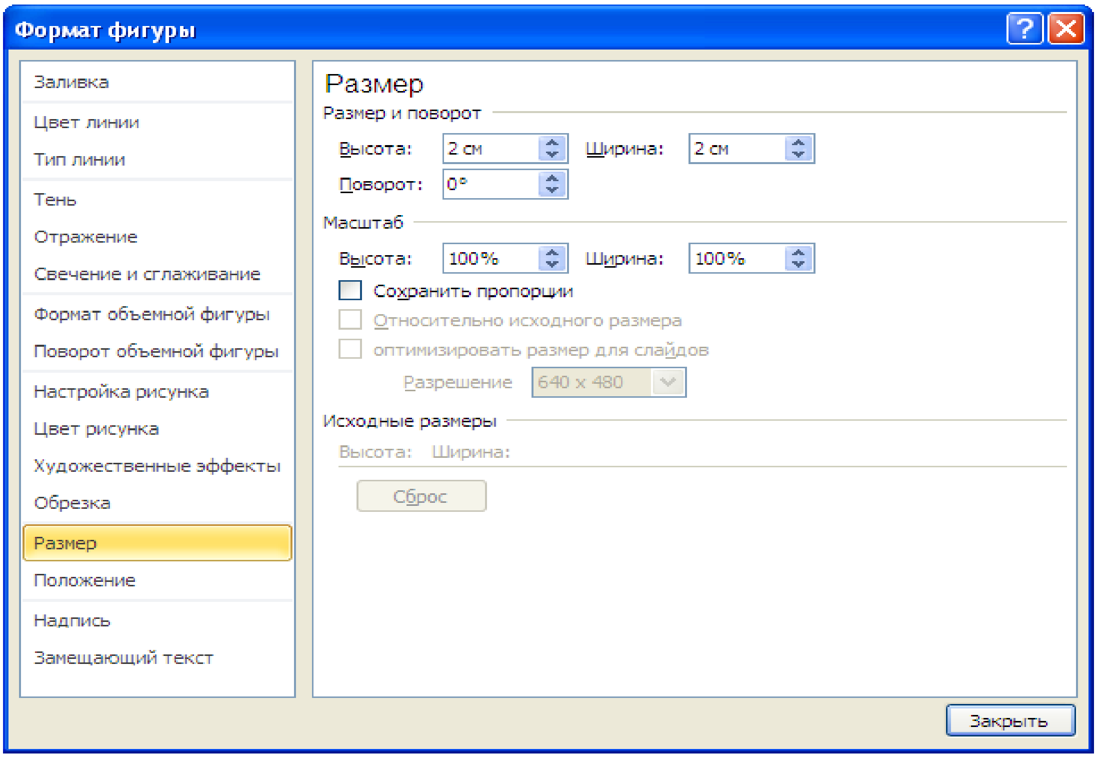
Ушундайча баракта фракталдарды сызуу жеңилирээк болот. Эми фракталды түзүүнү баштайлы:

1) Чоң квадраттын борбору координаталар башталышына дал келе тургандай жана жактары координаталар окторуна параллель болгондой кылып түзүп алабыз. Кийинки квадраттын жагы мурдагы квадраттын жагынан эки эсе кичине болгон, борборлору биринчи чейректин биссектрисасында жаткан, чокулаш квадраттарды түзөбүз (31-сүрөт).

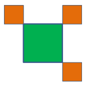


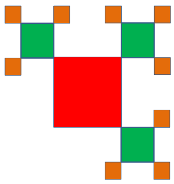
31-сүрөт

Мында квадраттардын узундуктары улам барган сайын эки эсе кичине болуп жаткандыгын төмөнкүдөй панелден көрүп текшерип туруугa болот (32-сүрөт).

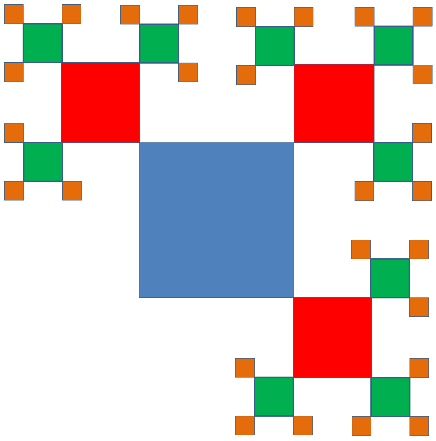


32-сүрөт

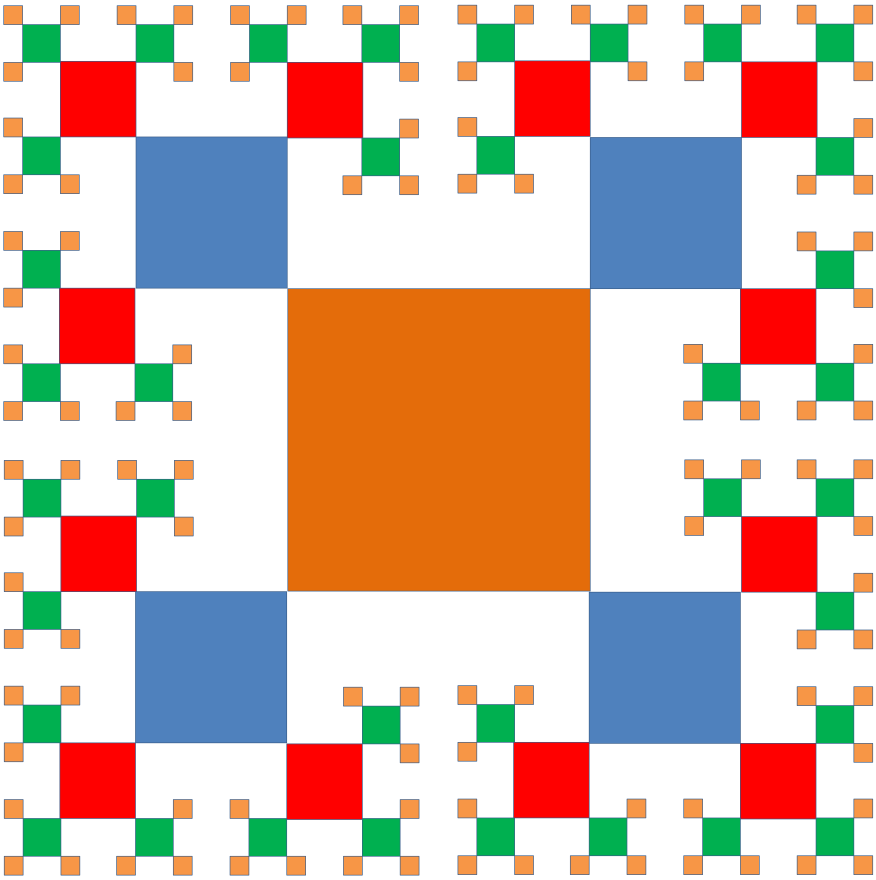
2) Акыркы түзүлгөн  квадратчаларын группалаштырып, копиялап, андан алдыңкы квадраттын калган эки чокусуна коюп чыгабыз. Натыйжада



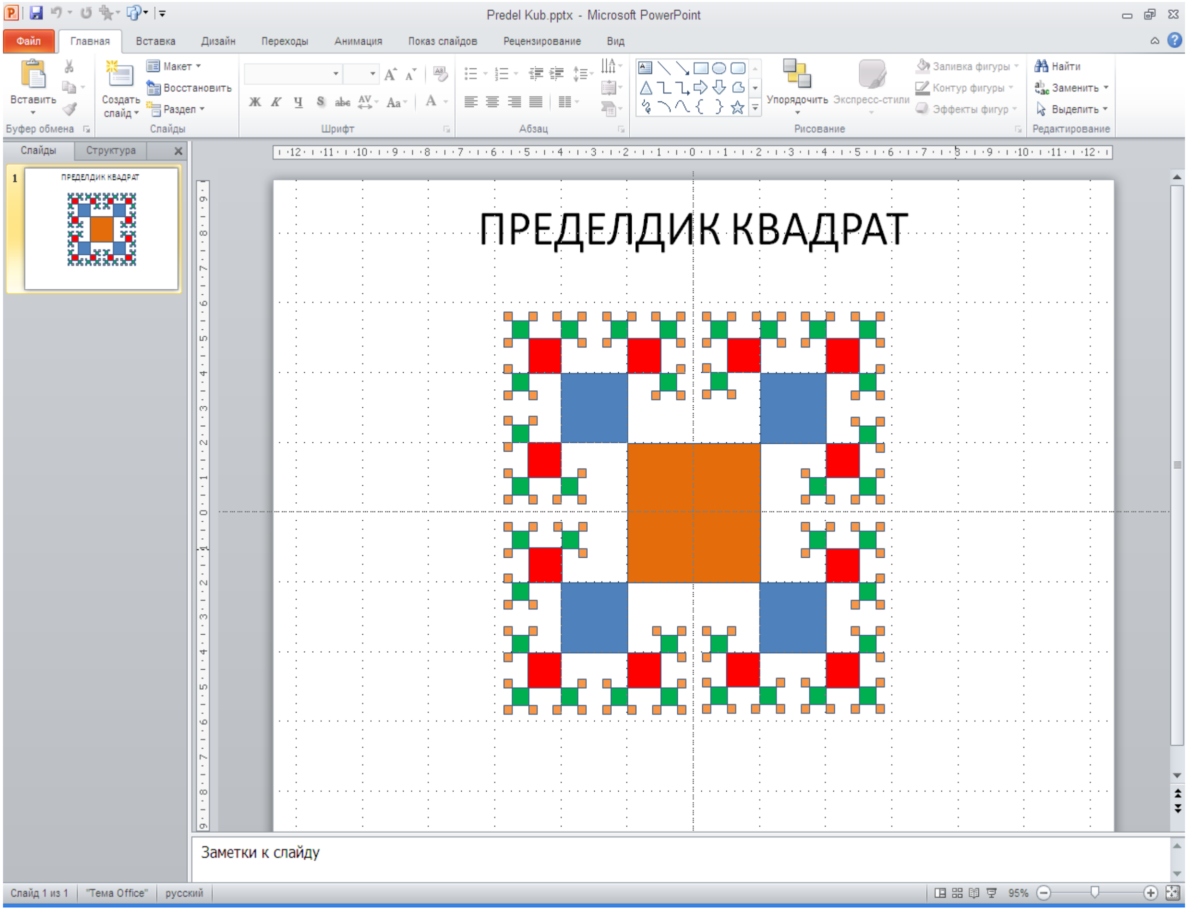
сүрөттөлүшкө ээ болобуз. Эми ушул объектилерди группалаштырып, копиялап, андан алдыңкы квадраттын калган эки чокусуна коюп чыксак, төмөндөгү сүрөттөлүшкө ээ болобуз:



Акыркы кадамда ушул объктилерди группалаштырып, копиялап, алгачкы квадраттын калган үч чокусуна коюп чыгуу менен төмөнкү фракталга ээ болобуз:



Бул жасалып жаткан кадамдар экранда көрсөтүлүп турат. Натыйжада экранда төмөндөгүдөй сүрөттөлүш келип чыгат:



33-сүрөт

Демек, PowerPoint программасынын жардамында геометриялык фракталдардын сүрөттөлүштөрүн берүүгө болот экен.

Мында биз тегиздиктеги фракталды түздүк, ушул сыяктуу эле бул фракталдын мейкиндиктеги аналогун түзүүгө болот.

Көнүгүүлөр

1. Төмөнкүлөрдүн кайсылары фракталдарга мисал боло алат?

а) ананас;

б) жүгөрүнүн мөмөсү;

в) папоротниктин жалбырагы;

г) ромашка гүлүнүн башы;

д) георгина гүлүнүн башы;

е) брокколи;

ж) күн караманын башы;

з) сары баш (пижма);

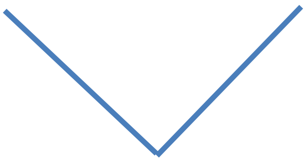
к) эңилчек;

л) кызгалдак.

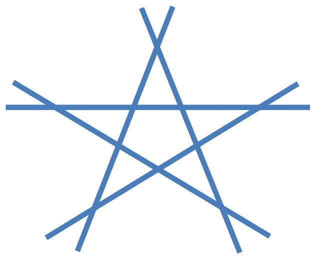
2. Жаратылышта кездешүүчү фракталдарга мисал келтиргиле.

3. Негизи төмөнкү фигуралар болгон геометриялык фракталдарды жараткыла:

а)



б)



4. Төмөнкү көрсөтүлгөн кадамдар боюнча фракталдарды түзгүлө.

а) Кандайдыр бир узундуктагы вертикалдык сызык сызылат. Бул сызыктын жогорку учуна берилген сызыктын узундугунан кичине болгон жана ал менен 45° ту түзгөн эки сызык оңго жана солго тургузулат. Түзүлгөн эки сызыктын ар бирине ушул эле эреже менен дагы сызыктар тургузула берет. Түзүү процесси улантыла берет (Пифагордун жылаңач дарагы);

б) Квадрат сызылат. Сызылган квадраттын бир жагына гипотенузасы квадраттын жагына дал келген тең капталдуу эмес тик бурчтуу үч бурчтук түзүлөт. Түзүлгөн үч бурчтуктун катеттерине квадраттар тургузулат. Андан ары процесс ушул квадраттар үчүн кайталанат (Пифагордун шамал айдаган дарагы);

в) Квадрат сызылат. Сызылган квадраттын ар бир жагына чоңдугу бул квадраттын чоңдугунан кичине болгон, чокусу берилген квадраттын жактырынын орто чекитинде жаткан 4 квадрат тургузулат. Пайда болгон 4 квадраттын ар бирине ушул иш аткарылат (Кошмок чынжыр);

г) Айлана берилген. Жануу чекиттери бул айлананын ичине сызылган туура үч бурчтуктун чокуларында жаткан айланалар берилген айлана менен жанышат. Тургузулган үч айлананын сыртына ушундай эреже менен дагы үч айлана сызылат ж.у.с. (Үч желекчелүү гүл).

5. 4-мисалдагы фракталдарды ар дайым эле түзүү мүмкүнбү? Жоопту негиздеп бергиле.

6. Негизи тик бурчтук болгон Пифагордун дарагын түзгүлө.

7. Пифагордун дарагын квадратка тургузулган үч бурчтук тең жактуу болгон учурда түзүүнү аткаргыла..

8. Негизи туура үч бурчтук, туура алты бурчтук болгон Пифагордун дарагын түзүүгө болобу?

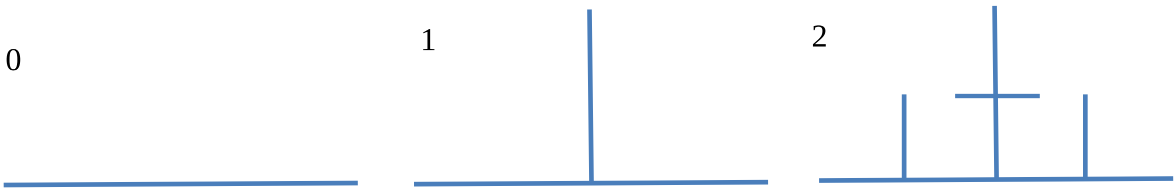
9. Хартер-Хейтуэянын драконун тик бурч төмөн жакты караган учурда түзгүлө.

10. Төмөнкү

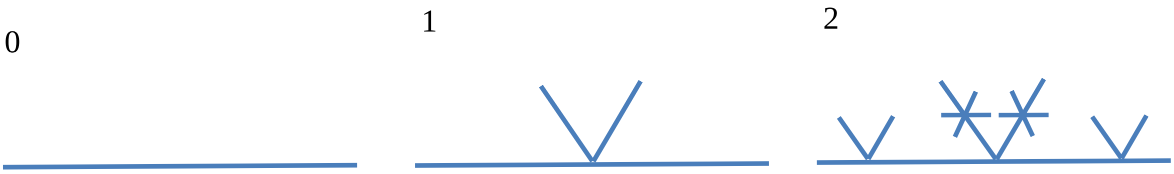
а) “Муздуу квадраттык фракталды”;

б) “Муздуу үч бурчтук фракталды” тургузуунун 2 кадамы берилген. Алардын 3-, 4-, 5- кадамдардагы сүрөттөлүшүн көрсөткүлө.

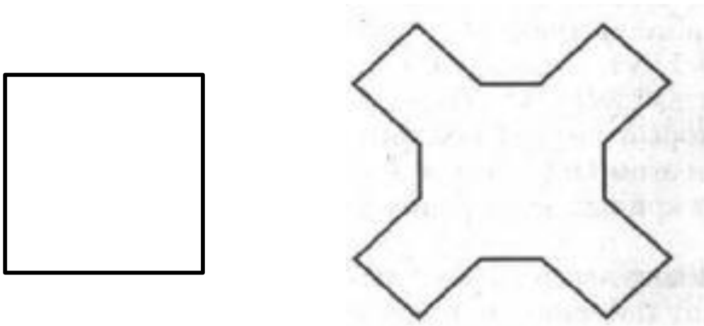
а)



б)

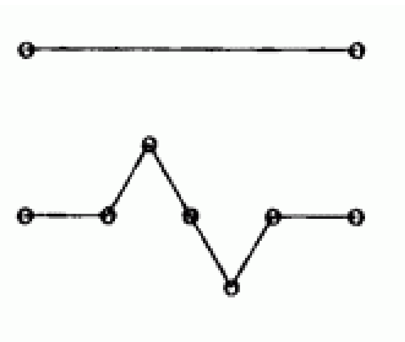


11. “Серпинскийдин ийриси” деп аталуучу фракталдын негизи жана түзүүнүн 1-кадамы берилди. Түзүүнүн 2-кадамын көрсөткүлө.

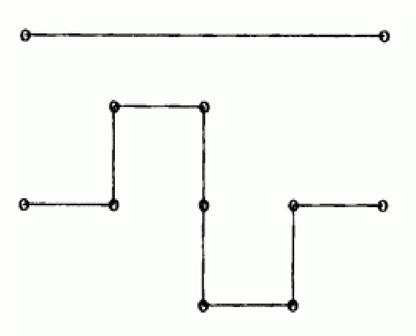


12. Төмөнкү сүрөттө берилген фракталдарды түзүүнүн кадамдарын бергиле жана фракталдык ченемдүүлүгүн тапкыла.

а)

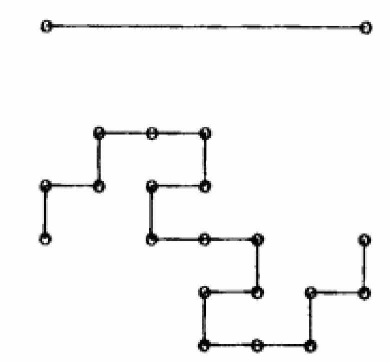


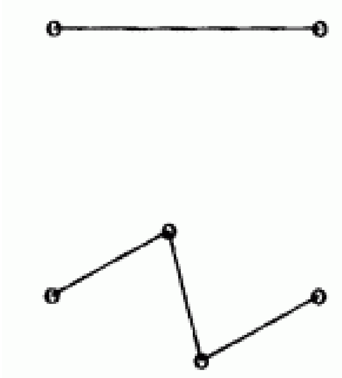
б)



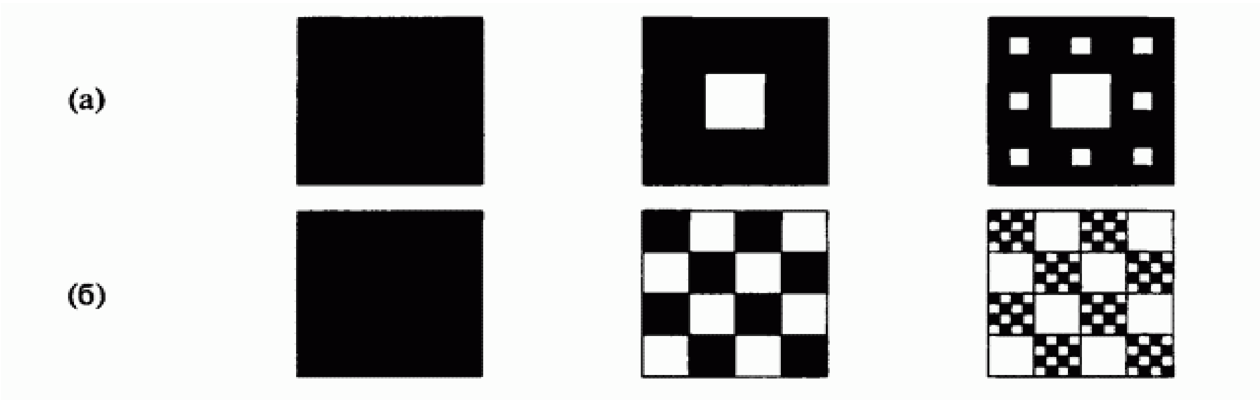
в)

г)





13. Төмөнкү сүрөттө берилген фракталдарды түзүүнүн кадамдарын бергиле жана фракталдык ченемдүүлүгүн тапкыла.



14. Фракталдык ченемдүүлүгү 6-мисалдын (а) сындагы фракталдын ченемдүүлүгү менен барабар болгон башка фракталды түзгүлө.

15. Серпинскийдин үч бурчтугу менен Паскалдын үч бурчтугунун ортосундагы байланышты көрсөткүлө.

16. Берилген кесинди 5 барабар бөлүккө бөлүнгөн учурдагы Кантордун көптүгүн түзгүлө жана ченемдүүлүгүн тапкыла.

17. Төмөнкү көптүктөрдүн фракталдык ченемдүүлүктөрүн тапкыла.

а) Кохтун ийриси; б) Серпинскийдин квадраты;

в) Серпинскийдин пирамидасы; г) Менгердин болпогу;

д) Т-фрактал; е) Н-фрактал.

18. Фракталдык ченемдүүлүгү

а) $d = \frac{ln9}{ln10} \approx 0,9542$; б) 1

болгон Кантордун көптүгүн түзгүлө.

19. Фракталдык ченемдүүлүгү

а) 1 ге; б) 2ге; в) өзүнүн евклиддик ченемдүүлүгүнө барабар болгон көптүктөрдү түзгүлө.

20. Төмөнкү фракталдардын касиеттерин келтирип чыгаргыла:

а) Кохтун ийриси; б) Серпинскийдин үч бурчтугу;

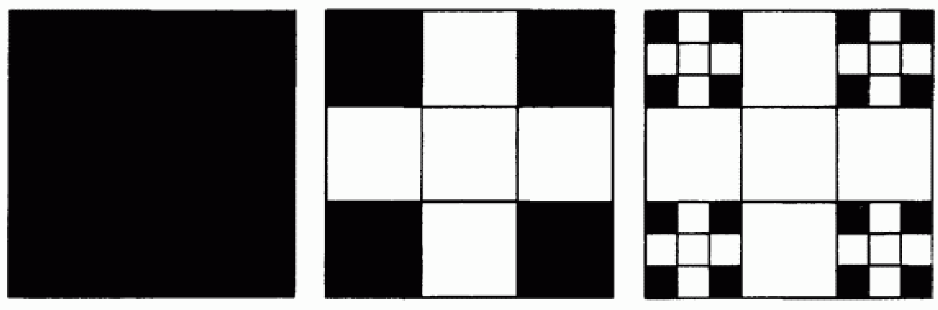
в) Серпинскийдин квадраты; г) Серпинскийдин пирамидасы;

д) Менгердин болпогу; д) Т-фрактал;

е) Н-фрактал; ж) Пифагордун дарагы.

21. Серпинскийдин үч бурчтугунда улам алынып ташталган үч бурчтуктардын аянттарынын суммасы берилген үч бурчтуктун аянтына барабар экендигин көрсөткүлө.

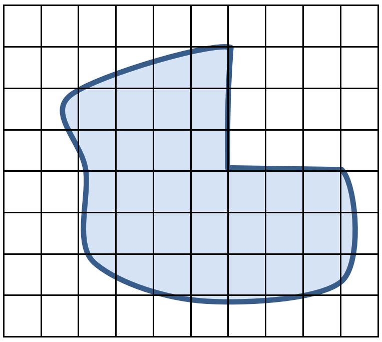
22. Төмөнкү Серпинскийдин чаңы деп аталуучу көптүктү түзүүдө улам алынып жаткан квадраттардын аянттарынын суммасын тапкыла.

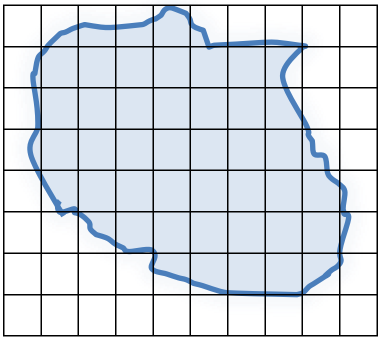


23. Кохтун бүртүкчөсүнүн чеги чексиз узундукка ээ болушун далилдегиле.

24. Төмөнкү чиймедеги фигуралардын аянтын (3) формуланын жардамында тапкыла:

б)





25. Дарактын жалбырагын алып, анын аянтын Пиктин формуласы менен эсептегиле.

26. Кохтун кар бүртүгүнүн аянтын тапкыла.

27. 3-мисалдагы фракталдарды PowerPoint программасында түзгүлө жана анимация бергиле.

28. Мандельброттун көптүгүн Excell программасында түзгүлө.

Изилдөөгө тапшырмалар

1. Левинин ийрисин изилдегиле.

2. Гильберттин ийрисин изилдегиле.

3. Дракон-фракталды изилдегиле.

4. Ричардсондун экспериментин кайталап, Ош шаарынын чек арасынын фракталдык ченемдүүлүгүн түрдүү картаны жана түрдүү масштабды пайдаланып тапкыла.

5. Дарактын жалбырагын алып, фракталдык ченемдүүлүгүн тапкыла.

6. Фигуранын аянтын эсептөөчү §6дагы (3) жана (4) формулаларды келтирип чыгаргыла.

7. Фигуранын аянтын эсептөөчү §6дагы (3) жана (4) формулаларды мейкиндиктеги фигуралар үчүн жалпылаштыргыла.

8. Кыргыздын оймо-чиймелерин фракталдык көз караште изилдегиле.

9. Фракталдарды компьютердик программаларда түзгүлө.

10. Көптүктөрдүн фракталдык ченемдүүлүктөрүн компьютердик программаларда табууну көрсөткүлө.

11. Фракталдардын колдонулуштарын тереңирээк изилдегиле.

12. 3-мисалдагы фракталдардын мейкиндиктеги аналогун түзгүлө.

13. Геометриялык фракталдарды ойлоп тапкыла.

Геометриялык фракталдарды түзүүгө берилген маселелер

1-түзүү

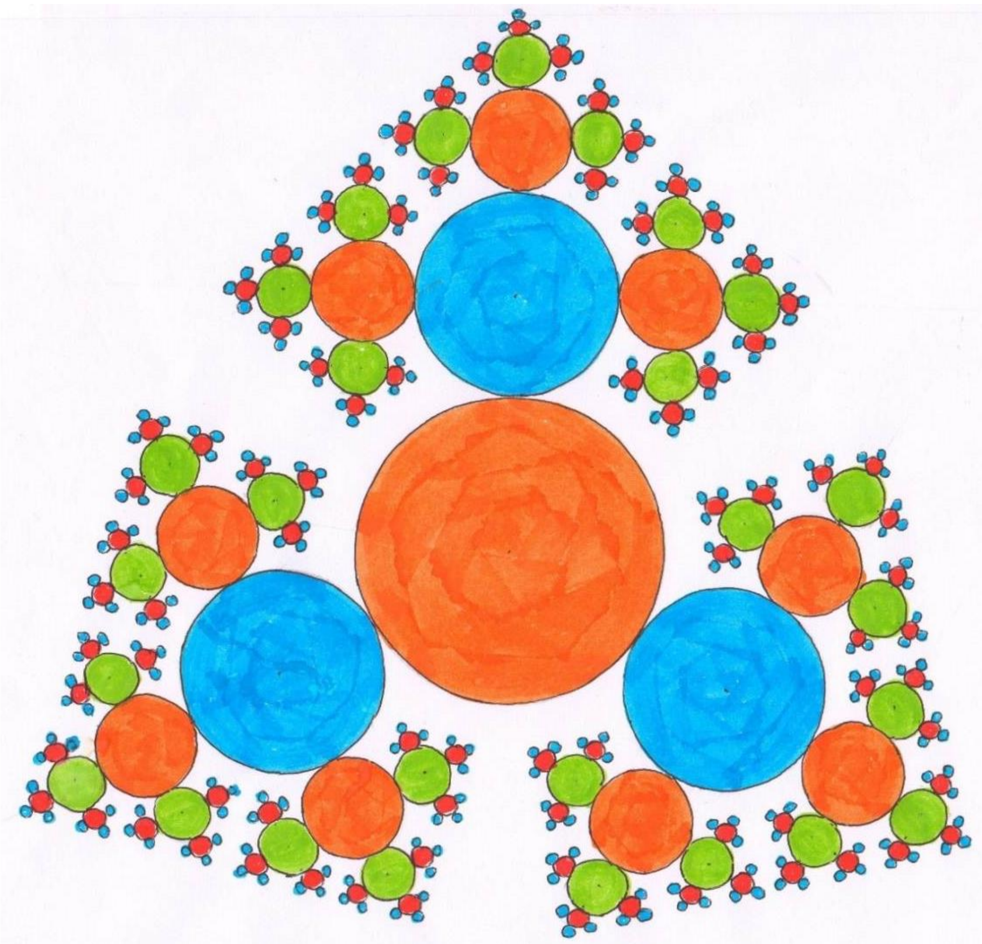
1. "Тегеректердин үч желекчелүү гүлү" аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн тегеректердин өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.



2-түзүү

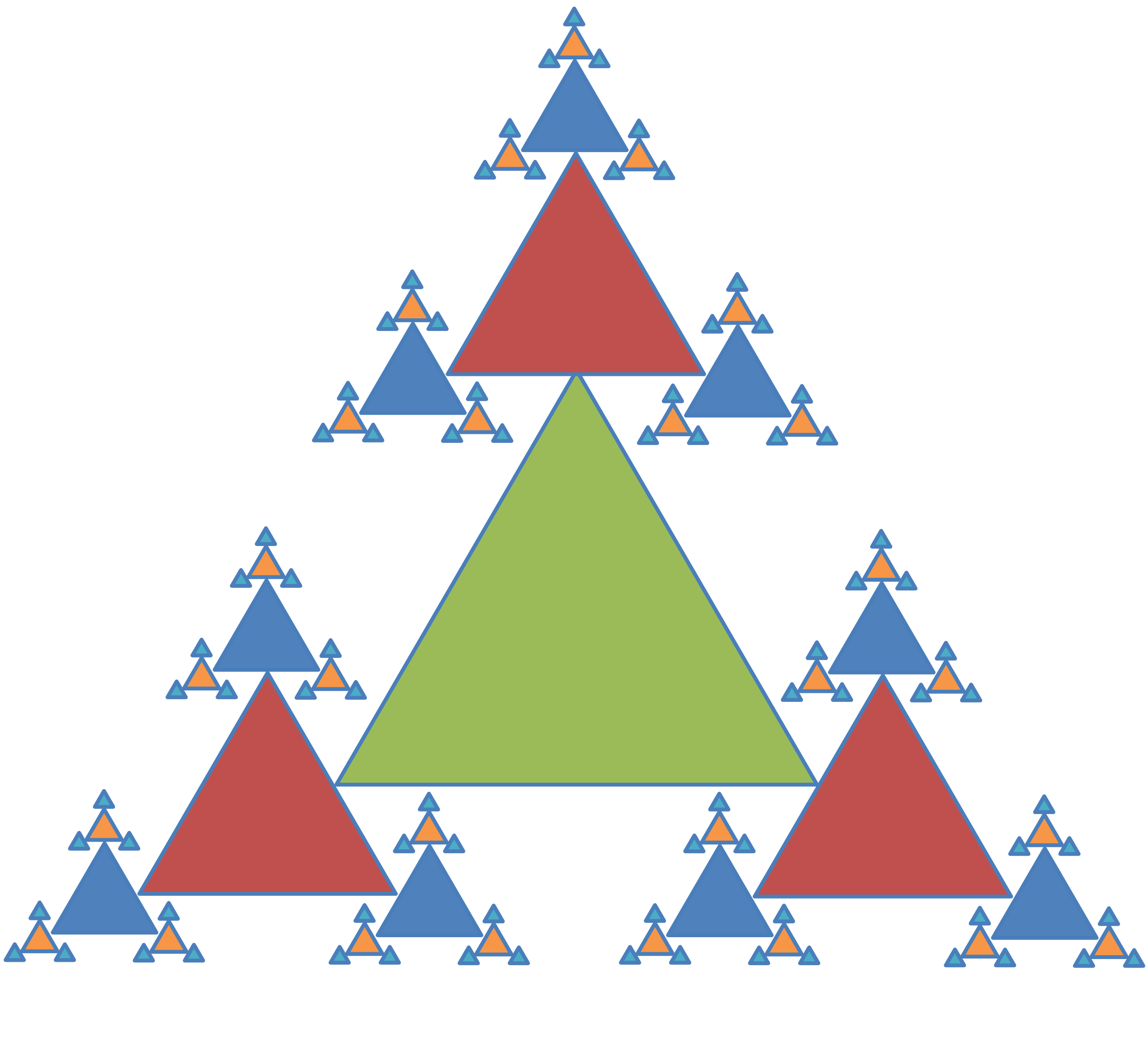
1. “ Үч бурчтук “Балаты”” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн үч бурчтуктардын өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.



3-түзүү

1. **1.** "Ромбдордун пределдик ромбу" аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн ромбдордун өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.

4-түзүү

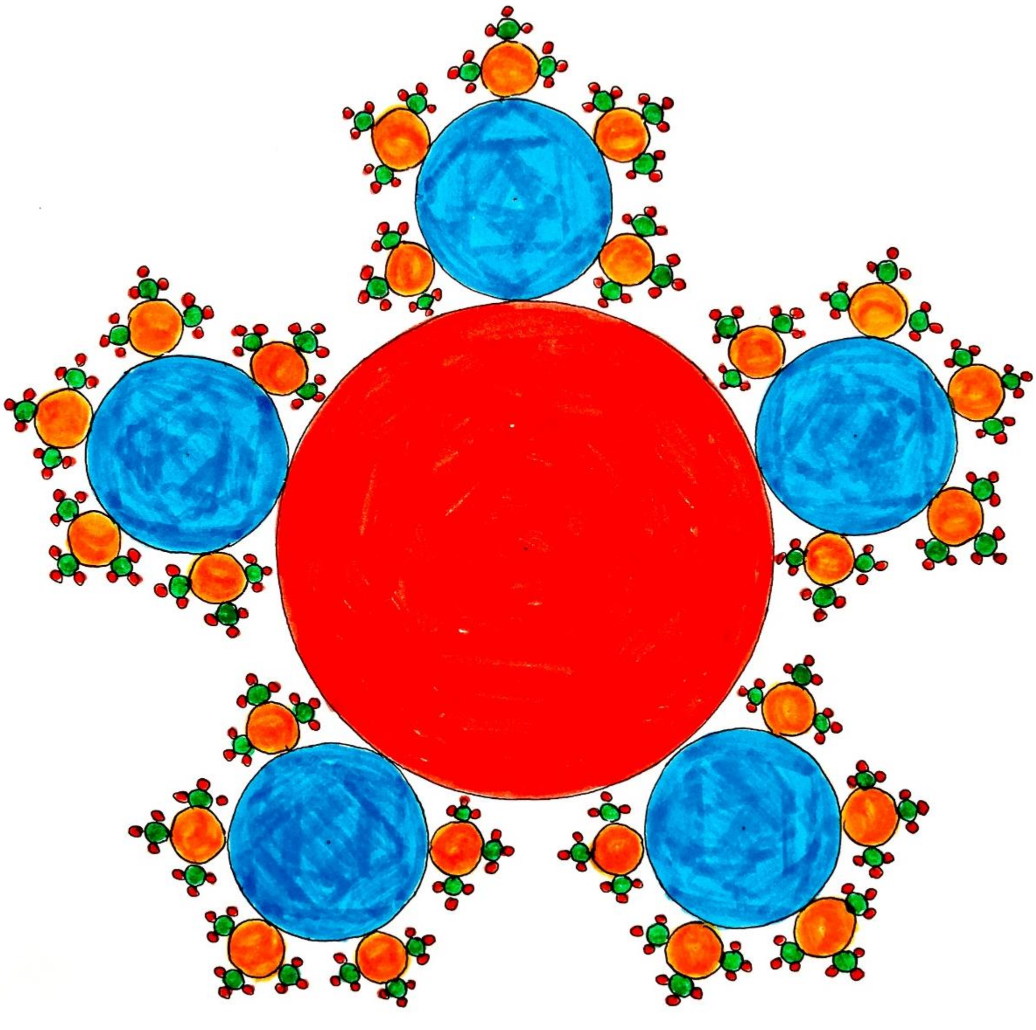
1. “Беш желекчелүү гүл” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн тегеректердин өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.



5-түзүү

1. “Ромдордун үч учтуу ромбу” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн ромбдордун өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.

6-түзүү

1. “Ромдордун беш учтуу жылдызы” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн ромбдордун өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.

7-түзүү

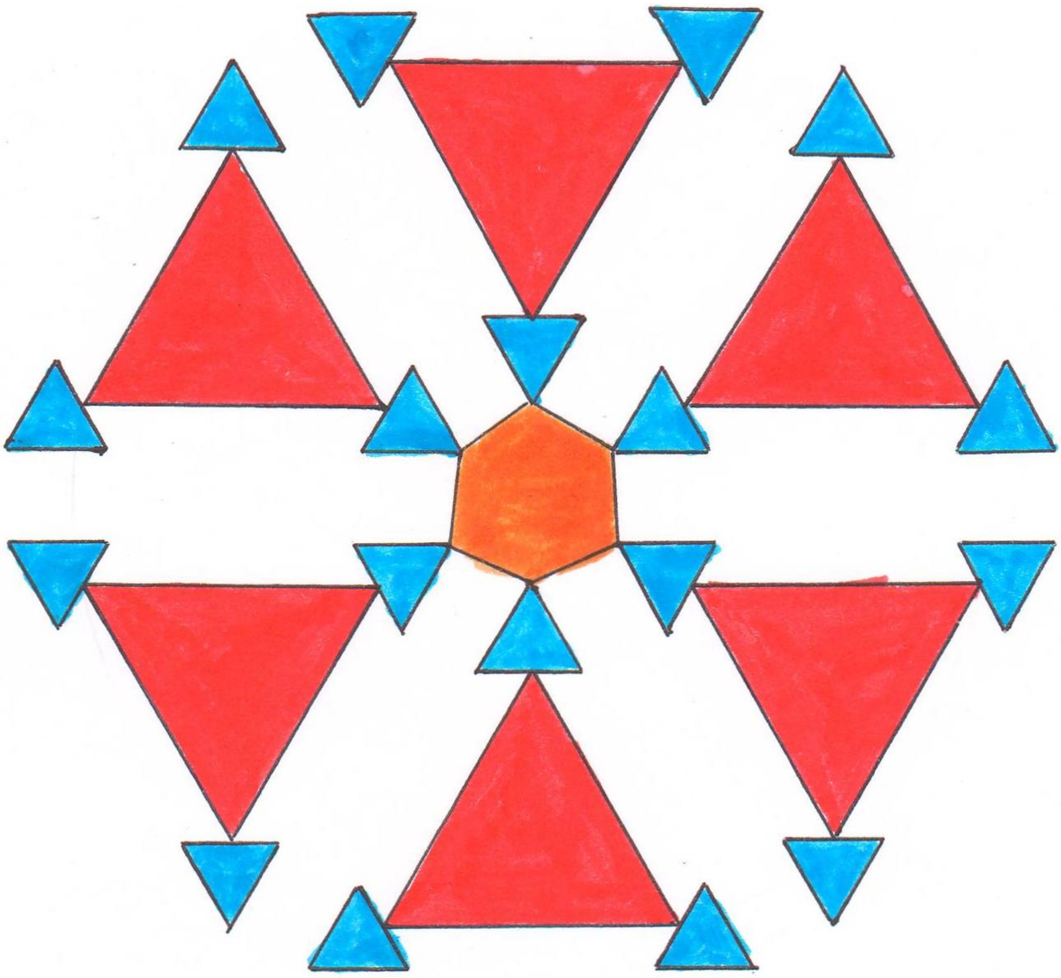
1. “Кызгалдак” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн үч бурчтуктардын өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.



8-түзүү

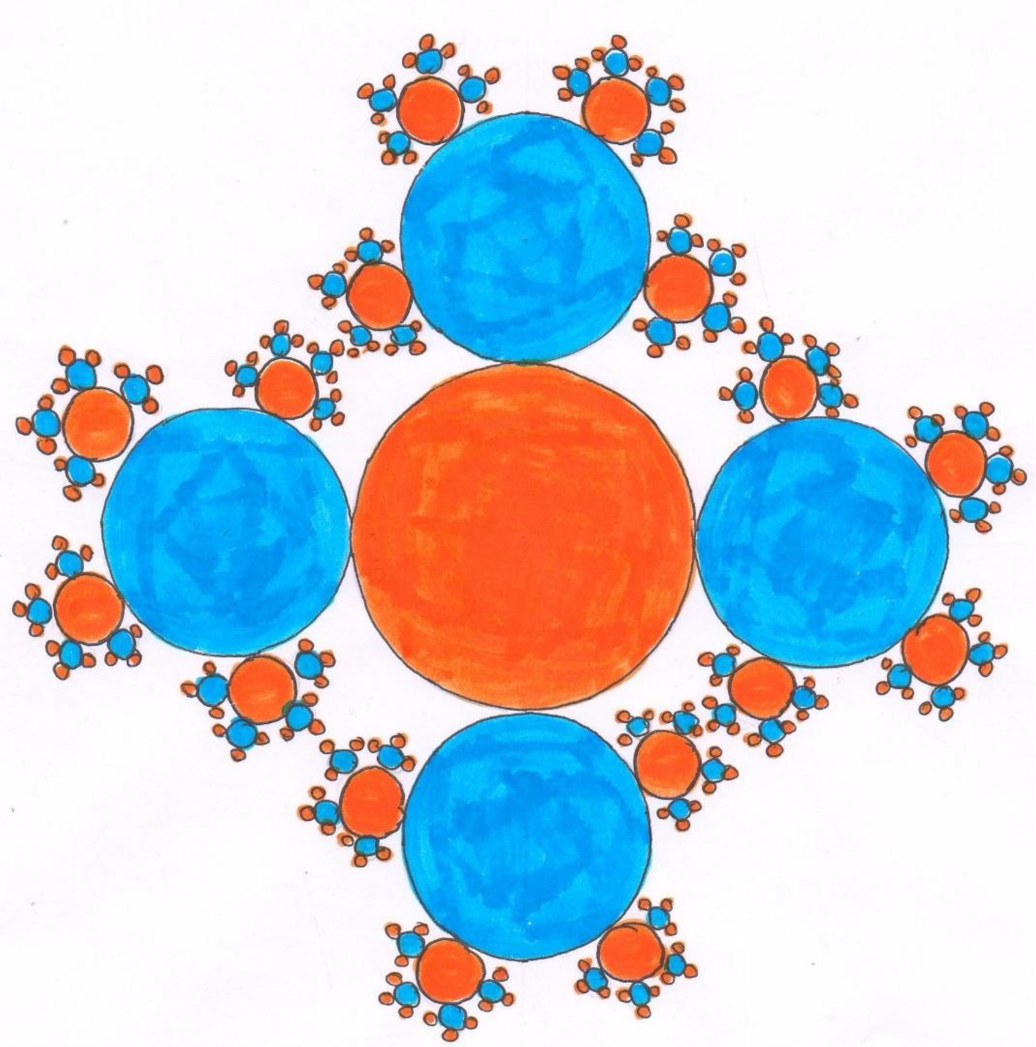
1. “Тегеректердин торчосу” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн тегеректердин өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.



9-түзүү

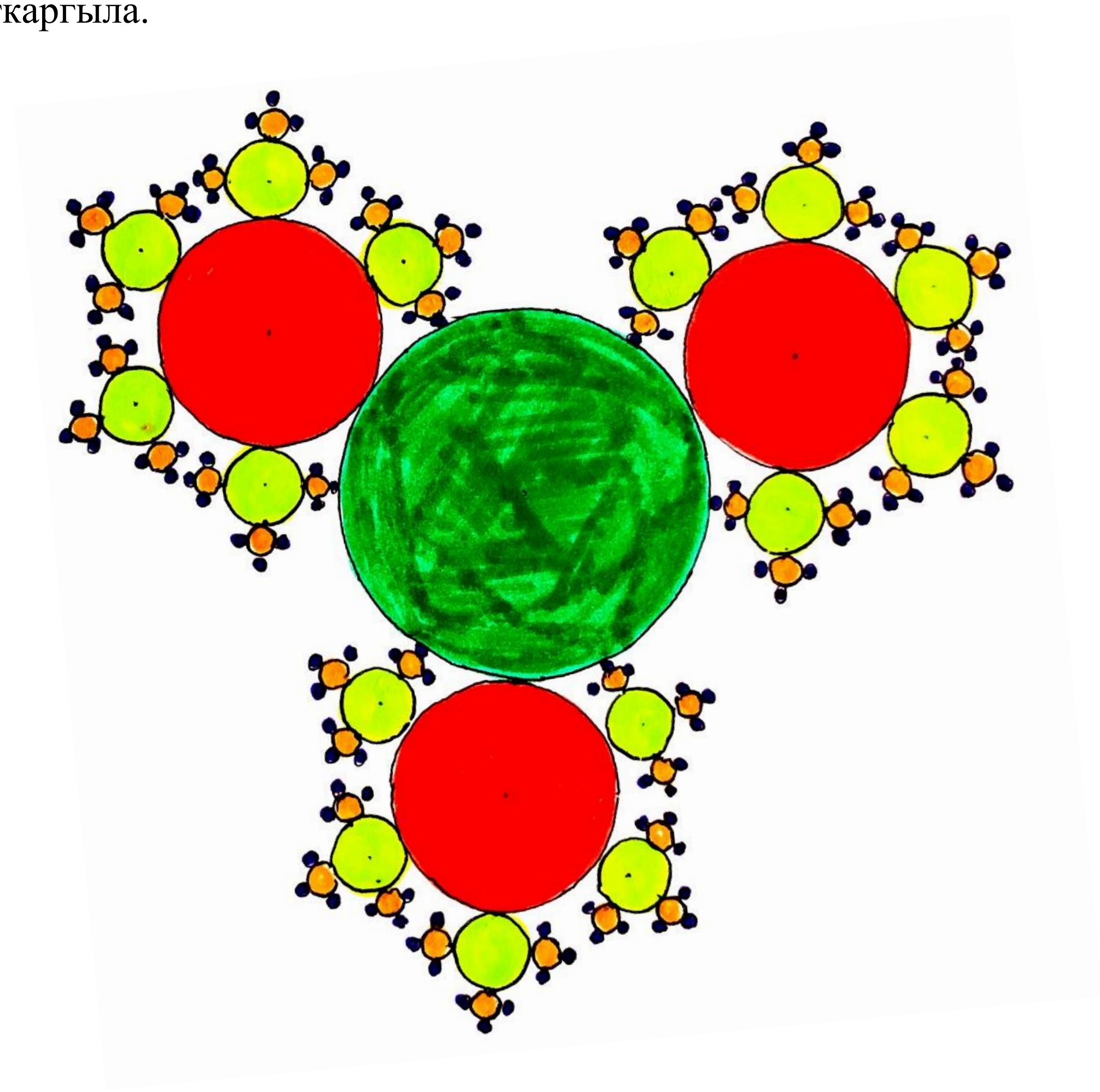
1. “Үч таажы” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн тегеректердин өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.



10-түзүү

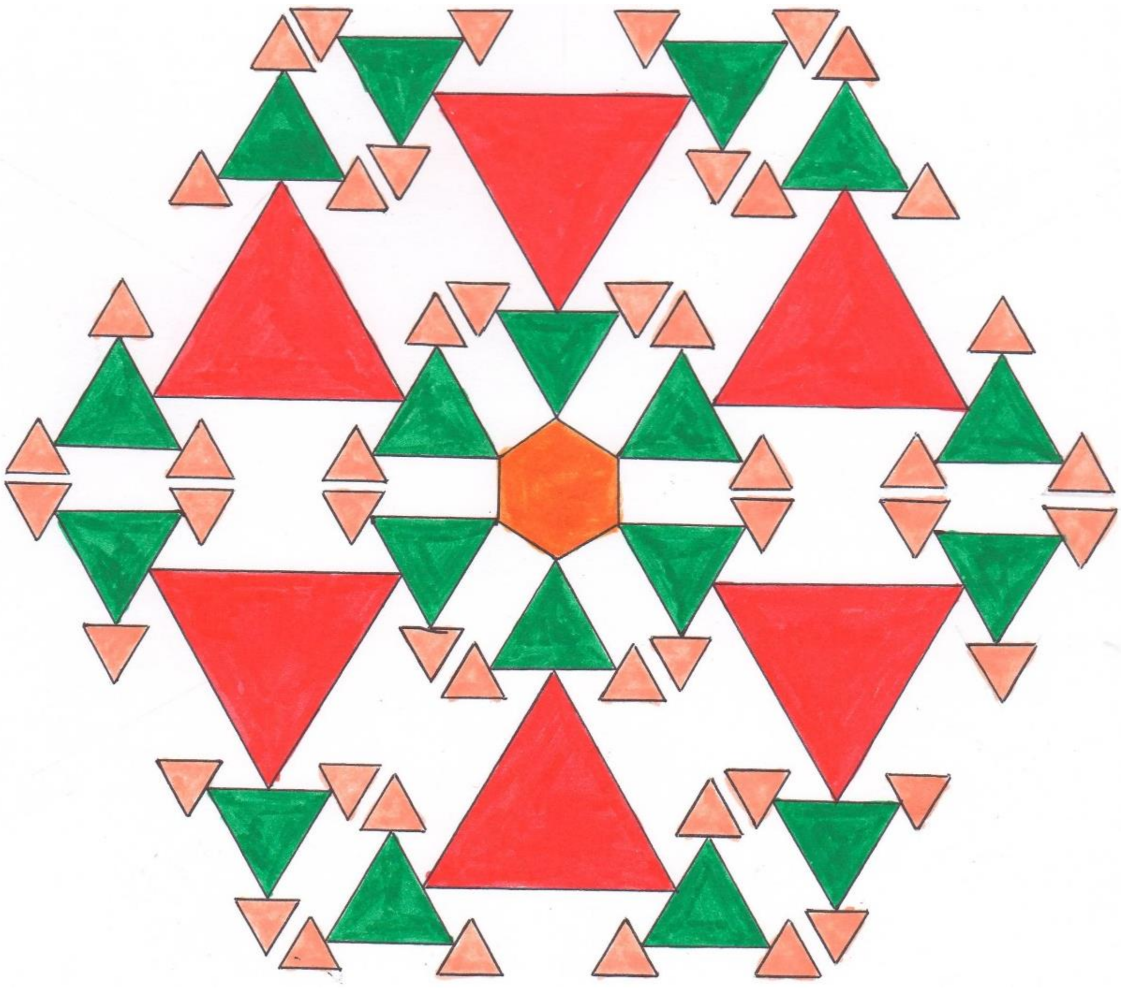
1. “Айгүл” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн үч бурчтуктардын өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.



11-түзүү

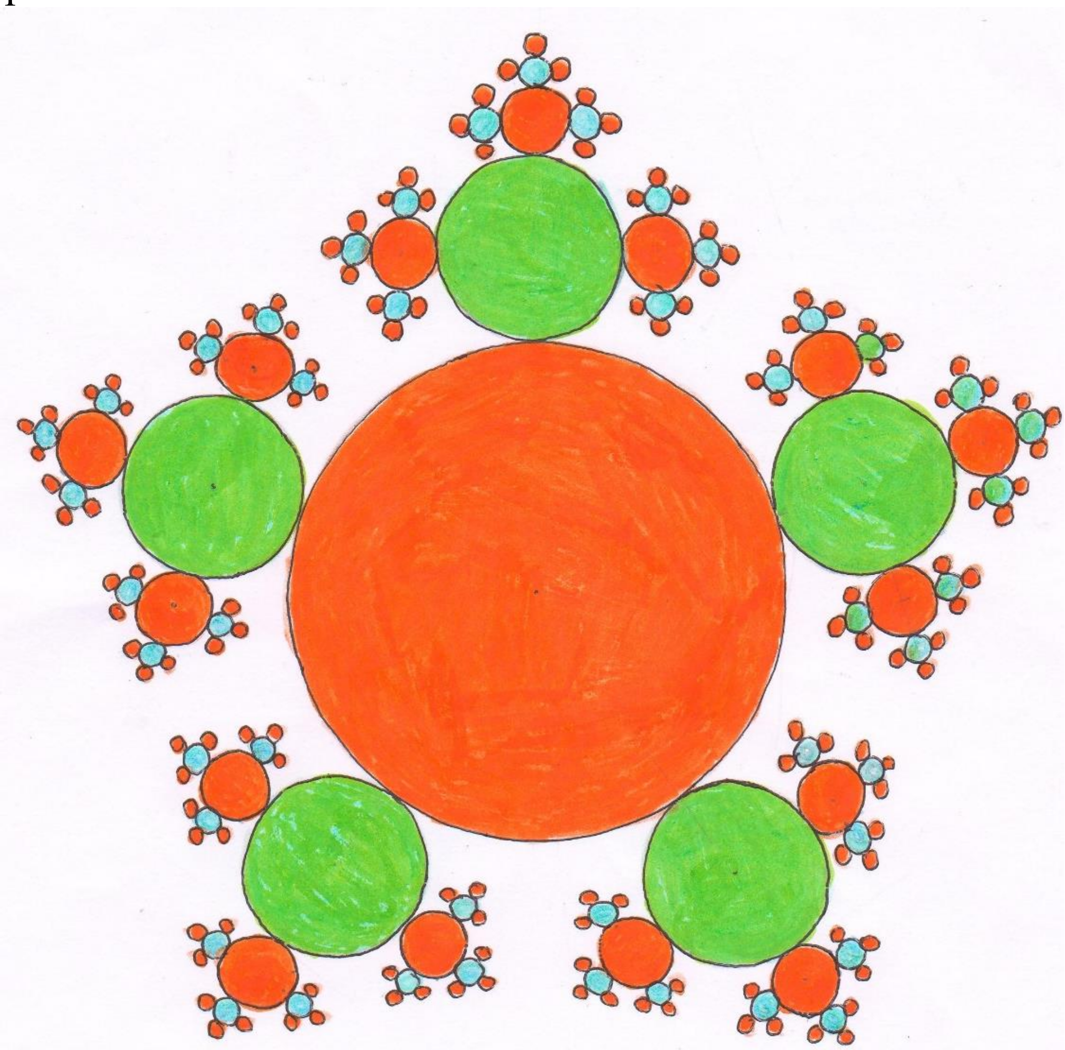
1. “Беш учтуу жылдыз “Айназик”” аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн тегеректердин өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.



12-түзүү

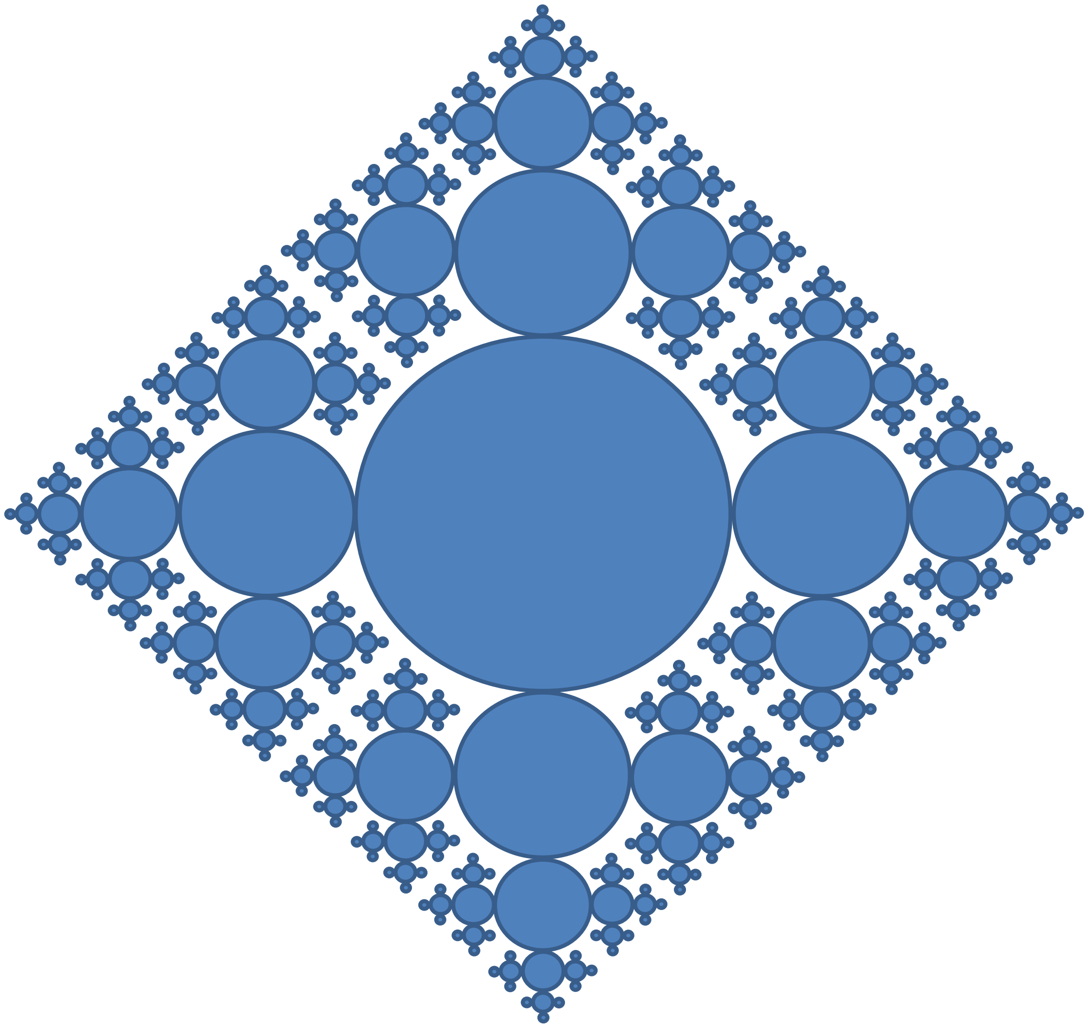
1. "Тегеректердин пределдик квадраты" аттуу фракталды алуу үчүн кандай геометриялык түзүүлөрдү удаалаш аткаруу керек?

2. Сүрөттө көрсөтүлгөн тегеректердин өлчөмдөрүн каалагандай тандап алуу менен аталган фракталды жаратууга болобу? Эгерде болбосо, анда фигуралардын өлчөмдөрүн кандайча өзгөртүү менен фракталдын сүрөттөлүшүн алууга боло тургандыгын аныктагыла.

3. PowerPoint программасын пайдаланып, аталган фракталды түзгүлө.

4. Бул фракталдын компьютердик сүрөттөлүшүн алуу үчүн программаны иштеп чыккыла.

5. Берилген фрактал кайсы бир мейкиндик фракталдын бул же тигил тегиздиктеги проекциясы экендиги белгилүү. Мейкиндик фракталды түзүү үчүн жогорудагы 1) - 4) тапшырмаларды аткаргыла.

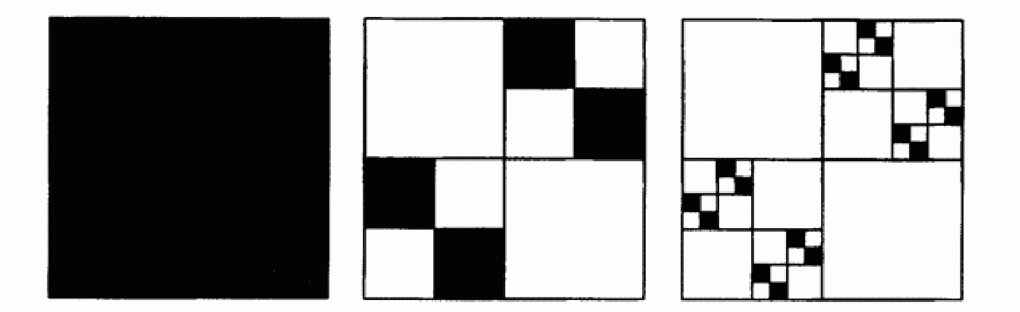


Жооптор

16. $\frac{\boldsymbol{ln4}}{\boldsymbol{ln5}} \approx \mathbf{0,86}$ **.**

17. а) $\frac{\boldsymbol{ln4}}{\boldsymbol{ln3}} \approx \mathbf{1,26}$**, б)** $\frac{\boldsymbol{ln8}}{\boldsymbol{ln3}} \approx \mathbf{1,89}$**, в)** $\frac{\boldsymbol{ln4}}{\boldsymbol{ln2}} = \mathbf{2}$**, г)** $\frac{\boldsymbol{ln20}}{\boldsymbol{ln3}} \approx \mathbf{2,73}$**, д)** $\frac{\boldsymbol{ln4}}{\boldsymbol{ln2}} = \mathbf{2}$ **, е)** $\frac{\boldsymbol{ln4}}{\boldsymbol{ln2}} = \mathbf{2}.$

18. б)



21. Көрсөтмө: $|x| < 1$ үчүн $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ катышын пайдалангыла.

23. Көрсөтмө: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n}$ пайдалангыла.

26. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Адабияттар

1. Балханов В. К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления. Улан-Уде. Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. 224 стр.
2. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: «РХД», 2013. 128 стр.
3. Бонч-Осмоловская Т. Фракталы в литературе: в поисках утраченного оригинала. http://textonly.ru/ №16
4. Герега А. Н. Конструктивные фракталы в теории множеств канторовы дисконтинуумы и континуумы Серпинского. Учебное пособие. – Одесса: «Освита Украины», 2017. 85 стр.
5. Кириллов А. А. Повесть о двух фракталах. – 2-е изд. –М.: МЦНМО, 2010. 180 стр.
6. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М., 2000. — 352 с.
7. Латыпова Н. В. Компьютерная обработка данных (фракталы). Ижевск. 2012. 78 стр.
8. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. –М.: Изд-во Институт компьютерных исследований, 2002. 656 стр.
9. Матиева Г. Геометриялык фракталдар (Геометрические фракталы. Geometrical fractals). – Ош: ОшМУ, 2018. – 73 б. – текст кыргыз, орус, англис тилдеринде
10. Моңолдоров Ш. К. Кыргыздын улуттук оймо-чиймелери. Бишкек, 1997.

11. О’Коннор Дж., Макдермотт И. Искусство системного мышления. Пер. с англ. – 8-е изд. – М.: Альпина Паблищер, 2014. 256 стр.
12. Төрөкан уулу Эсенкул. Кыргыздын кыскача санжырасы. 1-том. Бишкек, 1995. 228 бет
13. Трубецков Д.И., Трубецкова Е.Г. Фракталы и время (от Ричардсона и Мандельброта до Поллока). Фрактальная геометрия. Москва, 2017, 50 стр.
14. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1991.
15. Шабаршин А. А. Введение во фракталы. – М.: 2002, – 42 стр.

Электрондук ресурстар

1. https://elementy.ru/posters/fractals
2. https://ru.wikipedia.org
3. https://3dnews.ru/754657

Басууга берилди: 12.09.2018-ж.

Форматы: 60x84 1/16 *Көлөмү: 5,7 б.т.*
Буюртма: № 29

“Book-дизайн” компьютердик кызматында даярдалды
Ош шаары, И. Сулайманов к. №3.